

ВИТАЛИЙ ДОЛГОРУКОВ, ЕЛЕНА ПОПОВА*

НОВОЕ ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЛОГИКУ**

РЕЦЕНЗИЯ НА КНИГУ ДИРКА ХОФФМАНА О ПРЕДЕЛАХ МАТЕМАТИКИ

HOFFMANN D. LIMITS OF MATHEMATICS. A JOURNEY THROUGH THE KEY AREAS OF MATHEMATICAL LOGIC. — BERLIN : SPRINGER, 2025.

DOI: 10.17323/2587-8719-2026-1-404-409.

Логика заслуженно обладает репутацией сложной дисциплины, однако для начинающего внутренние трудности зачастую усугубляются еще и внешними обстоятельствами. Автор одного из руководств по самостоятельному изучению логики отмечает:

Ситуация удручающая. Сравнительно немногие математические факультеты предлагают студентам курсы по математической логике. Также серьезную логику все реже преподают на философских факультетах. Тем не менее сама логика остается столь же захватывающей и ценной дисциплиной, какой и была всегда. Но как передавать знания, если курсов недостаточно или нет вовсе? Похоже, многим придется изучать предмет самостоятельно по книгам — либо в одиночку, либо организовав учебные группы (локальные или онлайн) (Smith, 2022: 1).

Хотя введений в логику существует множество, выбрать среди них подходящее оказывается по-настоящему сложной задачей: необходимо найти баланс между строгостью и доступностью изложения, а также между шириной охвата тем и глубиной их рассмотрения. Эту непростую

* Долгоруков Виталий Владимирович, к. филос. н., доцент, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Москва), vdolgorukov@hse.ru, ORCID: 0000-0001-8272-822X; Попова Елена Леонидовна, стажер-исследователь, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Москва), elpopova@hse.ru, ORCID: 0000-0002-8618-2153.

** © Виталий Долгоруков; Елена Попова © Философия. Журнал Высшей школы экономики.

Благодарности: Статья подготовлена в результате проведения исследования в рамках проекта «Международное академическое сотрудничество» НИУ ВШЭ.

задачу стремится решить книга Дирка Хоффмана «Пределы математики. Путешествие по ключевым областям математической логики», вышедшая в издательстве Springer в 2025 г., — расширенный и дополненный авторский перевод с немецкого (Hoffmann, 2018).

Дирк Хоффман ставит перед собой амбициозную цель: «как можно яснее представить концепции, методы и результаты этой увлекательной области математики, не жертвуя глубиной изложения» (Hoffmann, 2024: V). Книга не позиционируется как учебник по математической логике, а служит введением, фокусирующимся на базовых понятиях, необходимых для понимания ключевых *ограничительных результатов*, в частности теорем Гёделя о неполноте, теоремы Тарского о невыразимости истины, неразрешимости проблемы остановки и др. Именно этот акцент, сочетающийся с дидактической продуманностью, делает ее отличной отправной точкой для знакомства с дисциплиной.

Книга Д. Хоффмана состоит из семи глав, которые охватывают достаточно широкий спектр тем. Рассмотрим их содержание подробнее.

Первая глава посвящена историческому введению в контекст зарождения современной логики. Автор проводит читателя от идей Г. Лейбница через поворотные точки: зарождение теории множеств в трудах Г. Кантора, формулировку программы Д. Гильберта, появление моделей вычислимости в работах А. Тьюринга, Э. Поста и А. Черча, доказательство ограничительных теорем К. Гёделя и вплоть до результатов П. Коэна и Ю. Матиясевича 1960–70-х гг. Особую ценность изложению придают заметки на полях, в которых приводятся выдержки из работ классиков и иллюстрации ключевых идей. В конце главы читателям предлагаются упражнения, например, перевести утверждения из *Begriffsschrift* Г. Фреге в современную логическую нотацию.

Вторая глава посвящена основам классической логики: логике высказываний и логике предикатов первого порядка. Автор не ограничивается представлением основных синтаксических и семантических результатов, он также рассматривает проблему разрешимости. Главу завершает экскурс в логику второго порядка — нечасто встречающуюся в вводных курсах тему, которая в то же время органично продолжает центральную для книги дискуссию о пределах математической формализации.

Сильной стороной изложения является его дидактическая проработанность. Материал подан доступно для начинающих, но в то же время будет интересен и тем, кто уже читал подобные введения в логику, поскольку выделяется среди остальных учебников. В частности, знакомство с формальными системами начинается не с абстрактных аксиом

пропозициональной логики, а с наглядного «игрушечного» арифметического исчисления. Для понимания излагаемого материала полезно обилие примеров и иллюстраций к доказательствам (например, для теоремы дедукции) и продуманной наглядной нотации (например, для переменных, которые не входят в формулу).

Тем не менее нам бы хотелось выделить несколько направлений для потенциального улучшения. Например, изложить теорему о дедукции в более общем виде (а не с конечным набором гипотез) и уделить больше внимания возвратной индукции, которая в ней используется. При изложении теоремы о полноте явно прописать различие между сильной и слабой формулировкой теоремы. В тексте встречаются значительные терминологические неточности. Так, на с. 86 аксиомные схемы названы просто аксиомами, а центральное для логики понятие корректности (*soundness*) в тексте переводится как *correctness* (например, Hoffmann, 2025: 70), что может привести к путанице с понятием правильности (*correctness* в другом контексте).

Третья глава посвящена арифметике Пеано и аксиоматической теории множеств (ZFC). Автор предлагает читателю проследить, как формализация интуитивных представлений о натуральных числах и множествах закономерно приводит к этим системам. Особого упоминания заслуживает визуализация — например, несколько иллюстраций, помогающих представить структуру начальных ординалов. В то же время, учитывая сложность материала и его последующую важность, изложение могло бы выиграть от более подробного введения в наивную теорию множеств (которое, к примеру, стоило вынести в приложение после основного текста), что помогло бы начинающему читателю.

Четвертая глава целиком посвящена ограничительным теоремам Гёделя. Отметим, что у Хоффмана есть отдельная книга о теоремах Гёделя о неполноте (Hoffmann, 2024). Особую ценность представляет специальный раздел, критикующий распространенные заблуждения и ошибочные интерпретации этих теорем. Исторический контекст также не остается без внимания, например, автор подчеркивает роль Р. Карнапа в формулировке леммы о диагонализации. В качестве пожелания можно отметить, что иллюстративную базу главы удачно дополнили бы конкретные примеры утверждений, недоказуемых в арифметике Пеано, в частности, помимо упомянутых последовательностей Гудстейна, еще одним простым наглядным примером является известный «червь Беклемишева».

Пятая и шестая главы посвящены теории вычислимости и алгоритмической теории информации соответственно. В качестве основной вычислительной модели используется машина Тьюринга, однако упоминаются и другие модели — клеточные автоматы, лямбда-исчисление, машины Минского и пр. Отдельные параграфы посвящены ограничительным результатам — проблеме остановки, теореме Успенского — Райса и первой теореме Гёделя о неполноте в контексте теории вычислимости. Также отдельный параграф посвящен 10-й проблеме Гильберта. В шестой главе рассматриваются вопросы колмогоровской сложности и теорема Г. Чейтина.

Седьмая глава представляет собой введение в классическую теорию моделей. Автор последовательно формулирует фундаментальные результаты: о полноте логики предикатов, теореме Лёвенгейма — Сколема и теореме о компактности. Опять же стоит отметить дидактическую продуманность книги. Рядом с определением (в частности, фильтра и ультрафильтра) на полях приводятся примеры, позволяющие схватить базовые интуиции, а в конце главы есть упражнения, позволяющие читателю проверить, правильно ли он понял эти определения. Примечательно, что в этой вводной книге затрагиваются и столь продвинутые темы, как метод форсинга.

Книга Хоффмана обладает несколькими достоинствами. Во-первых, автору удалось создать пособие для достаточно широкой аудитории и продемонстрировать связь математической логики с философией математики. Книга написана живым языком, с вдохновляющими цитатами (в том числе из истории логики). Ее можно рекомендовать не только студентам, которые собираются специализироваться на логике, но также эпистемологам и философам науки.

Во-вторых, автор сопровождает изложение дополнительными материалами, которые помогают разобраться в происходящем: в книге много иллюстраций разного типа (портреты ученых, визуальные метафоры, примеры понятий и др.). Отдельного упоминания заслуживает таймлайн с годами жизни ключевых авторов, который служит прекрасным инструментом для навигации по истории логики.

В-третьих, в книге содержится большое количество упражнений (с маркировкой по трем уровням сложности), а ответы к ним вынесены на отдельный сайт. Это делает книгу особенно ценной для самостоя-

тельной работы и является большим подспорьем в освоении трудного материала.

В-четвертых, отличительной чертой изложения является его концептуальная целостность. Каждая тема предваряется мотивирующим введением, одновременно объясняющим ее место среди остальных тем. Это помогает читателю смотреть на логику как на живую и развивающуюся дисциплину.

В дополнение к тем недостаткам, которые мы отметили по ходу обзора глав настоящей книги, хотелось бы подчеркнуть и общую проблему — систематическое использование нестандартной терминологии для общепринятых понятий, что может ввести в заблуждение начинающего читателя.

Данную книгу можно рекомендовать в качестве отправной точки для более глубокого знакомства с математической логикой. Стоит отметить, что она подходит не только для помощи в изучении курса математической логики, многие ее разделы будут также полезны для философии математики, эпистемологии, философии логики и др.

Хочется пожелать этой книге хорошего перевода на русский язык. Как нам кажется, такой перевод имеет все шансы как на коммерческий успех, так и на то, чтобы стать настольной книгой начинающего логика.

ЛИТЕРАТУРА

- Hoffmann D.* Grenzen der Mathematik. Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik. — Heidelberg : Springer, 2018.
- Hoffmann D.* Gödel's Incompleteness Theorems : A Guided Tour Through Kurt Gödel's Historic Proof. — Berlin : Springer, 2024.
- Hoffmann D.* Limits of Mathematics. A Journey Through the Key Areas of Mathematical Logic. — Berlin : Springer, 2025.
- Smith P.* Beginning Mathematical Logic : A Study Guide. — Cambridge : Logic Matters, 2022.

Dolgorukov, V. V., and E. L. Popova. 2026. "Novoye vvedeniye v matematicheskuyu logiku [New Introduction to Mathematical Logic]: retsenziya na knigu Dirka Khoffmana o predelakh matematiki [A Review of a Book by Dirk Hoffmann on Limits of Mathematics]" [in Russian]. *Filosofiya. Zhurnal Vysshey shkoly ekonomiki [Philosophy. Journal of the Higher School of Economics]* 10 (1), 404–409.

VITALIY DOLGORUKOV

PHD IN PHILOSOPHY

ASSOCIATE PROFESSOR

HSE UNIVERSITY (MOSCOW, RUSSIA); ORCID: 0000-0001-8272-822X

ELENA POPOVA

RESEARCH FELLOW

HSE UNIVERSITY (MOSCOW, RUSSIA); ORCID: 0000-0002-8618-2153

NEW INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LOGIC

A REVIEW OF A BOOK BY DIRK HOFFMANN ON LIMITS OF MATHEMATICS

HOFFMANN, D. 2025. *LIMITS OF MATHEMATICS. A JOURNEY THROUGH THE KEY AREAS OF MATHEMATICAL LOGIC*. BERLIN: SPRINGER

DOI: 10.17323/2587-8719-2026-1-404-409.

REFERENCES

- Hoffmann, D. 2018. *Grenzen der Mathematik. Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik* [in German]. Heidelberg: Springer.
- . 2024. *Gödel's Incompleteness Theorems: A Guided Tour Through Kurt Gödel's Historic Proof*. Berlin: Springer.
- . 2025. *Limits of Mathematics. A Journey Through the Key Areas of Mathematical Logic*. Berlin: Springer.
- Smith, P. 2022. *Beginning Mathematical Logic: A Study Guide*. Cambridge: Logic Matters.