

АРСЕНТИЙ ТИМОХИН*

ЗАМЕЧАНИЯ О РЕЛЕВАНТНОЙ КОННЕКСИВНОЙ ЛОГИКЕ БЕЗ СОКРАЩЕНИЯ**

Получено: 08.03.2026. Рецензировано: 15.07.2026. Принято: 20.08.2026.

Аннотация: Настоящая статья посвящена метатеоретическому исследованию CRW — непротиворечивой коннексивной релевантной логики без закона сокращения. В CRW доказуемы тезисы Аристотеля и Боэция, а антецеденты и консеквенты всех ее имплицативных законов имеют хотя бы одну общую пропозициональную переменную. Отличие CRW от других коннексивных релевантных логик со схожим классом законов заключается в сохранении непротиворечивости — в CRW не существует такой формулы, что она и ее отрицание являются теоремами. Кроме того, благодаря отсутствию сокращения, в CRW блокируется стандартный вывод парадокса Карри. В основе семантики CRW лежит понятие коммутативного моноида — алгебры с коммутативной ассоциативной операцией и нейтральным элементом. Данные свойства позволяют содержательно проинтерпретировать элементы носителя алгебры как конечные совокупности эмпирических досье — конкретных наблюдений, экспериментов и измерений. В статье доказываются корректность аксиоматизации CRW и семантическая полнота относительно исчисления. Показывается, что CRW является консервативным расширением имплицативного фрагмента релевантной логики RW. Доказательство семантической полноты строится методом канонической модели, опирающимся на технику А. Уркварта в адаптации Й. Вайса. Совместно оба результата устанавливают адекватность аксиоматики и семантики, то есть совпадение классов доказуемых и общезначимых формул CRW.

Ключевые слова: коннексивная логика, релевантная логика, импликация, противоречивость, семантическая полнота, закон сокращения, парадокс Карри.

DOI: 10.17323/2587-8719-2026-3-319-339.

ПРОТИВОРЕЧИЯ И КОННЕКСИВНЫЕ РЕЛЕВАНТНЫЕ ЛОГИКИ

Противоречивой называют логику $\mathbf{L}$, в которой в качестве законов содержатся формулы вида φ и $\neg\varphi$:

$$\vdash_{\mathbf{L}} \varphi \quad \text{и} \quad \vdash_{\mathbf{L}} \neg\varphi.$$

*Тимохин Арсентий Александрович, аспирант, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (Москва), flawlesstheory@inbox.ru, ORCID: 0009-0002-9250-0944.

**© Тимохин, А. А. © Философия. Журнал Высшей школы экономики.

В классической логике отношение логического следования подчиняется *принципу взрыва* (из противоречия следует что угодно¹):

$$\varphi \wedge \neg\varphi \models \psi.$$

Например, в классической логике из «Все лебеди белые и неверно, что все лебеди белые» следует «Американцы не высаживались на Луне». Противоречие $\varphi \wedge \neg\varphi$ — при таком подходе содержит избыточный объем информации — из него можно вывести произвольное высказывание. Несмотря на наличие этого принципа, классическая логика является непротиворечивой, то есть не существует такой формулы φ , что она доказуема и доказуема формула $\neg\varphi$. Иначе обстоит дело со многими неклассическими логиками. В частности, многие коннексивные логики являются противоречивыми. Таковыми являются одна из самых известных коннексивных логик **C X**. Вансинга (Wansing, 2005), а также **CR**, **CM** и **CC**, семантически охарактеризованные Й. Вайсом (Weiss, 2022). В упомянутых системах используется другой подход, который можно назвать *паранепротиворечивым*: из противоречия не следует что угодно. В паранепротиворечивых логиках принцип взрыва не выполняется:

$$\varphi \wedge \neg\varphi \not\models \psi.$$

Благодаря этому упомянутые логики не являются тривиальными, то есть не содержат в качестве законов все формулы:

$$\exists\varphi : \mathcal{K}_L \varphi.$$

При паранепротиворечивом подходе противоречие содержит ограниченный объем информации — из него не следует что угодно, но из него можно вывести какую-то часть содержащейся в нем информации. Например, из приведенного выше в качестве примера высказывания можно по отдельности вывести «Все лебеди белые» или «Неверно, что все лебеди белые». Наконец, существует подход, трактующий *отрицание как отмену* (Routley & Routley, 1985). Согласно этому подходу, отрицание φ отменяет, стирает, нейтрализует содержание φ . Из $\varphi \wedge \neg\varphi$ нельзя ничего вывести, даже φ и $\neg\varphi$ по отдельности, так что противоречие вовсе не содержит информации. Раутли² понимают отношение логического следования как отношение включения логического содержания — соответственно, из φ не следует $\neg\varphi$, поскольку в таком случае φ должна

¹В статье мы будем использовать $p, q, r, \dots$ для обозначения пропозициональных переменных и $\varphi, \psi, \chi, \dots$ для обозначения метаварiableных.

²В 1983 г. Ричард Раутли изменил свою фамилию на Силван (англ. Sylvan).

была бы иметь в качестве логического содержания $\neg\varphi$, что нейтрализует ее. Отсюда Раутли заключают, что верно $\neg(\varphi \rightarrow \neg\varphi)$.

В современной литературе по коннексивной логике $\neg(\varphi \rightarrow \neg\varphi)$ и $\neg(\neg\varphi \rightarrow \varphi)$ принято называть тезисами Аристотеля³. Эти две формулы выражают идею о том, что ни одно высказывание не может влечь собственное отрицание (так же как ни одно высказывание не может быть логическим следствием собственного отрицания). Две другие ключевые для коннексивной логики формулы обыкновенно называют тезисами Боэция: $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ и $(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$. Тезисы Боэция выражают идею о том, что ни одно высказывание не может влечь совместно некоторое высказывание и его отрицание. Тезисы Аристотеля и Боэция не являются законами классической логики, поэтому логики, содержащие их в качестве законов, относятся к классу контр-классических. К последним Л. Хамберстоун было предложено относить логики, не все законы которых являются законами классической логики⁴ (Humberstone, 2000). Таким образом, коннексивные логики формализуют особенности условных высказываний, которые не могут быть выражены средствами классической логики и ее подсистем. Под коннексивной логикой далее мы будем понимать логику, в которой доказуемы тезисы Аристотеля и тезисы Боэция, а также импликация несимметрична (Estrada-González & Ramírez-Cámara, 2016):

$\vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\varphi)$	Тезис Аристотеля 1
$\vdash \neg(\neg\varphi \rightarrow \varphi)$	Тезис Аристотеля 2
$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$	Тезис Боэция 1
$\vdash (\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$	Тезис Боэция 2
$\nVdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	Несимметричность импликации

Логическая теория может быть коннексивной, но при этом в ней, как, например, в логике Х. Вансинга **C**, из «Генрих VIII умер в 1547 году» может следовать «Если у роз острые шипы, то Генрих VIII умер»

³См. историческую реконструкцию взглядов Аристотеля и Боэция в контексте истории коннексивной логики в: McCall, 1966; более подробно см. в: Lenzen, 2022; McCall, 2012.

⁴Л. Хамберстоун выделял два смысла термина «контр-классический»: поверхностный и глубокий. В поверхностном смысле все логики, в которых не все законы являются законами классической логики, являются контр-классическими. В этом смысле все коннексивные логики являются контр-классическими. В глубоком смысле контр-классической логикой является логика, для связок которой нельзя подобрать перевод, дающий подсистему классической логики. Данный перевод был предложен Й. Вайсом в Weiss, 2022. Нами было показано, что всякий перевод аксиомной схемы **CRW** доказуем в классической логике, поэтому **CRW** является контр-классической логикой только в поверхностном смысле (Тимохин, 2025).

в 1547 году». Если φ истинно, $\psi \rightarrow \varphi$ истинно при любом ψ . Наличие у роз острых шипов никак не влияет на исторический факт, фиксирующий дату смерти Генриха VIII.

Данный парадокс выражается формулой, называемой утверждением консеквента:

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi).$$

Аналогично ложность φ влечет, что ψ истинно при любом φ . Этому соответствует следующая формула:

$$\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi).$$

В классической логике импликация оказывается ложной только при совместной истинности антецедента и ложности консеквента. В остальных случаях импликация оказывается истинной даже тогда, когда антецедент ложен.

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Поэтому выражение «Если река Дунай находится в Сибири, то Луна — естественный спутник Земли» оказывается истинным в классической логике. Этот пример показывает, что истинностное значение материальной импликации определяется только истинностными значениями ее антецедента и консеквента; наличие содержательной связи между ними не является условием ее истинности.

Если понимать импликацию как аналог союза «если..., то» и как аналог отношения логического следования (понимаемого как отношение включения логического содержания), то приведенные примеры показывают, что классическое отношение логического следования и материальная импликация не соответствуют этому пониманию. Для того чтобы избежать этого, разрабатываются логические теории, называемые релевантными⁵. Они предъявляют к импликации следующее требование: антецедент и консеквент должны быть связаны по содержанию. Релевантная логика исключает классические принципы, которые с точки зрения реальной практики рассуждений оказываются неуместными. Можно по-разному эксплицировать, что означает «связь по содержанию». Одним из самых известных критериев релевантности является

⁵О релевантной логике в целом см.: Anderson & Belnap, 1975; Anderson et al., 1992.

наличие у антецедентов и консеквентов импликативных законов логики общей пропозициональной переменной⁶.

В последние годы в логической литературе растет число исследований, направленных на совмещение свойств релевантности и коннексивности в одной логической теории⁷. Логика **CR**, синтаксически сформулированная Н. Франсезом (Francez, 2019), является коннексивным расширением импликативного фрагмента релевантной логики **R**. Тем не менее она является противоречивой (но не тривиальной)⁸. Так, в ней доказуемы следующие две формулы:

$$\neg(((\neg\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \neg\phi) \rightarrow \neg(((\neg\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \neg\phi))),$$

$$((\neg\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \neg\phi) \rightarrow \neg((\neg\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \neg\phi).$$

Первая формула соответствует подстановке в тезис Аристотеля 1. Обозначим вторую формулу как θ , тогда первая будет иметь вид $\neg\theta$. В **CR** допустимы противоречивые посылки, но не допускаются избыточные, нерелевантные выводы. Но противоречие возникает также и на уровне теорем: приведенные выше формулы следуют из пустого множества посылок. Если в некоторой базе данных или научной теории возникает конфликт источников или она опирается на несовершенные эмпирические данные, паранепротиворечивый подход позволяет успешно блокировать эксплозивные выводы. Например, из непустого множества посылок Γ может следовать φ и $\neg\varphi$, что можно также объяснить ошибочностью научной теории; Γ может подлежать дальнейшему пересмотру и зависеть от конкретных, специфических посылок. В случае с **CR** противоречие возникает на уровне законов логики, и всякая логика, являющаяся расширением **CR**, будет также противоречивой, что требует пересмотра ряда аксиомных схем и семантических постулатов данной логики для устранения противоречивости.

Нами был предложен метод устранения противоречивости **CR** (Тимохин, 2025). Для этого была сформулирована новая логическая теория **CRW** (как исчисление гильбертовского типа), которая синтаксически отличается от **CR** отсутствием закона сокращения в списке аксиомных

⁶В англоязычной литературе по логике данный критерий принято называть *variable sharing property* (VSP). Этот критерий является необходимым, но не достаточным условием для того, чтобы считать логику релевантной. В настоящей работе мы будем использовать данное требование в качестве технического критерия релевантности. О VSP см.: Belnap, 1960.

⁷См., напр.: Francez, 2019; Omori, 2016; Weiss, 2022.

⁸См. доказательство этого в: *ibid*.

схем, а семантически — отсутствием постулата идемпотентности. Было установлено, что полученная логика является коннексивной, релевантной и при этом непротиворечивой. Чем же еще **CRW** принципиально отличается от **CR**?

Во-первых, непротиворечивость и коннексивность **CRW** влекут недоказуемость формулы $((\neg\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \neg\phi) \rightarrow \neg((\neg\phi \rightarrow \phi) \rightarrow \neg\phi)$, для вывода которой в исчислении **CR** использовалась схема сокращения. Как видно, в данной формуле из антецедента логически следует его отрицание. Но сама мотивация коннексивной логики как раз и состоит в том, чтобы не допускать подобных утверждений. Так, А. Капснер считает, что наличия доказуемости тезисов Аристотеля и Боэция еще не достаточно для выражения интуиций, лежащих в основе коннексивной логики (Kapsner, 2012). Он предложил критерий сильной коннексивности — к нашему минимальному критерию добавляются еще два требования:

Для любой модели $\mathcal{M}$ и для любой формулы φ выполняется $\not\models^{\mathcal{M}} \varphi \rightarrow \sim \varphi$;

Для любой модели $\mathcal{M}$ и для любых формул φ и ψ выполняется $\not\models^{\mathcal{M}} \varphi \rightarrow \psi$ или $\not\models^{\mathcal{M}} \varphi \rightarrow \sim \psi$.

Несмотря на то что **CRW** не является сильной по Капснеру — можно подобрать модель, в которой выполняется формула $p \rightarrow \neg p$, — она решает базовую проблему: не существует доказуемой формулы вида $\varphi \rightarrow \neg\varphi$, что в общем случае и предписывается коннексивной логикой.

Во-вторых, **CRW** является логикой без сокращения, то есть в ней не доказуема следующая формула:

$$(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi).$$

Сокращение играет важную роль в выводе парадокса Карри (Shapiro & Beall, 2026). Будем называть k Карри-предложением для π в теории T , если k и $k \rightarrow \pi$ взаимозаменяемы. π — произвольное предложение, которое может быть никак не связано с предложением k . Рассмотрим предложение k : «Если k истинно, все суждения математики являются синтетическими *a priori*». Предположим, что k истинно. Поскольку « k истинно» и «Если k истинно, все суждения математики являются синтетическими *a priori*» взаимозаменяемы согласно теории T , имеем, что если k истинно, то, если k истинно, все суждения математики являются синтетическими *a priori*. Используя схему сокращения и *modus ponens*, получаем, что если k истинно, все суждения математики являются синтетическими *a priori*. Используя импликацию в другую сторону, получаем,

что если k истинно, все суждения математики являются синтетическими *a priori*, то k истинно. По *modus ponens* получаем, что k истинно. Применяя его вновь, выводим, что все суждения математики являются синтетическими *a priori*. Допустив истинность предложения, ссылающегося на само себя, мы смогли вывести произвольное предложение. Одним из возможных логических ответов на возникновение парадокса Карри является устранение схемы сокращения. Отказ от сокращения блокирует стандартный вывод парадокса Карри, представленный выше, что является еще одним преимуществом логик без сокращения. Вывод парадокса Карри можно представить также следующим образом:

- | | |
|--|---------------------------------|
| 1. $k \rightarrow k$ | Рефлексивность импликации |
| 2. $k \rightarrow (k \rightarrow \pi)$ | Из 1 по взаимозаменяемости |
| 3. $(k \rightarrow (k \rightarrow \pi)) \rightarrow (k \rightarrow \pi)$ | Сокращение |
| 4. $k \rightarrow \pi$ | Из 3 и 2 по <i>modus ponens</i> |
| 5. k | Из 4 по взаимозаменяемости |
| 6. π | Из 4 и 5 по <i>modus ponens</i> |

Таким образом, настоящая статья представляет собой развитие идей из работы: Тимохин, 2025. Ее основная цель — продемонстрировать, что исчисление **CRW** адекватно предложенной семантике, то есть доказать корректность исчисления **CRW** относительно семантики коммутативного моноида, а также семантическую полноту данной семантики относительно исчисления **CRW**. В секции 2 даются определения исчисления и семантики **CRW**. В секции 3 показывается, что **CRW** является консервативным расширением импликативного фрагмента **RW**, а также устанавливаются корректность и семантическая полнота данной логики. В секции 4 обозреваются открытые проблемы и перспективы для будущих исследований.

ИСЧИСЛЕНИЕ И СЕМАНТИКА CRW

Логика **CRW** формулируется в языке $\mathcal{L}$, который содержит счетное множество пропозициональных переменных Pgor , логические связки $\rightarrow$ и $\neg$, а также скобки. Определения формулы, вывода, доказательства и теоремы стандартны.

Определение 1. Система **CRW** — это наименьшее множество $\mathcal{L}$ -формул, содержащее все подстановки в следующие схемы аксиом и замкнутое относительно *modus ponens* (MP):

- (A1) $\varphi \rightarrow \varphi$,
 (A2) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\chi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\chi \rightarrow \psi))$,
 (A3) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$,
 (A4) $\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$,
 (A5) $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$,
 (A6) $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi)$,
 (A7) $(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$,
 (MP) $\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$.

Перед основными семантическими определениями мы напомним ряд определений из универсальной алгебры⁹.

Определение 2. Алгебра (универсальная алгебра, алгебраическая структура) A есть упорядоченная двойка $\langle M, \langle O_i \rangle \rangle$, где M есть произвольное множество, $\langle O_i \rangle$ есть множество операций на M .

Определение 3. Тип алгебры $A = \langle M, \langle O_i \rangle \rangle$ есть множество местностей операций $\langle d_i \rangle$, заданных на носителе M .

Определение 4. Пусть алгебра $A = \langle M, * \rangle$, где M — произвольное множество, $*$ — операция на M . Тогда A называется коммутативным моноидом, если для любых элементов a, b и c из M верно, что они удовлетворяют следующим условиям:

- ◊ $a * (b * c) = (a * b) * c$ (ассоциативность),
- ◊ $a * b = b * a$ (коммутативность),
- ◊ $0 * a = a$ (наличие нейтрального элемента).

Используя этот понятийный аппарат, можно сформулировать основные семантические определения.

Определение 5. Модельная структура коммутативного моноида есть упорядоченная тройка $\mathfrak{F} = \langle S, 0, \sqcup \rangle$, где $\langle S, \sqcup \rangle$ есть коммутативный моноид и $0 \in S$ есть наименьший (нейтральный) элемент в $\langle S, \sqcup \rangle$. Бинарная операция $\sqcup$ обладает следующими свойствами:

- ◊ Для любых элементов x, y, z из S верно, что
 - $0 \sqcup x = x$ (наличие нейтрального элемента),
 - $x \sqcup y = y \sqcup x$ (коммутативность),
 - $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z)$ (ассоциативность).

⁹Более подробно об алгебраических методах в логике см.: Dunn & Hardegree, 2001; Rasiowa, 1974.

Определение 6. Модель CRW есть упорядоченная двойка $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, где $\mathfrak{F}$ есть модельная структура коммутативного моноида, и оценка V есть отображение множества пропозициональных переменных в декартово произведение подмножеств носителя, $V : \text{Prop} \rightarrow P(S) \times P(S)$. Таким образом, оценка V пропозициональной переменной p — это упорядоченная двойка, в которой первый элемент — это оценка истинности p , а второй элемент — оценка ложности p :

$$\diamond V(p) = \langle X, Y \rangle.$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$\diamond V^+(p) = X,$$

$$\diamond V^-(p) = Y.$$

Отношения $\models_x^{\mathfrak{M}^+}$ и $\models_x^{\mathfrak{M}^-}$ определяются следующим образом.

1. $\models_x^{\mathfrak{M}^+} p$ тогда и только тогда, когда $x \in V^+(p)$.
2. $\models_x^{\mathfrak{M}^-} p$ тогда и только тогда, когда $x \in V^-(p)$.
3. $\models_x^{\mathfrak{M}^+} \neg\phi$ тогда и только тогда, когда $\not\models_x^{\mathfrak{M}^-} \phi$.
4. $\models_x^{\mathfrak{M}^-} \neg\phi$ тогда и только тогда, когда $\models_x^{\mathfrak{M}^+} \phi$.
5. $\models_x^{\mathfrak{M}^+} \phi \rightarrow \psi$ тогда и только тогда, когда для всякого $y \in S$:

$$\not\models_y^{\mathfrak{M}^+} \phi \text{ или } \models_{x \sqcup y}^{\mathfrak{M}^+} \psi.$$
6. $\models_x^{\mathfrak{M}^-} \phi \rightarrow \psi$ тогда и только тогда, когда для всякого $y \in S$:

$$\not\models_y^{\mathfrak{M}^+} \phi \text{ или } \models_{x \sqcup y}^{\mathfrak{M}^-} \psi.$$

Заметим, что, поскольку метаязыковая импликация может быть выражена через дизъюнкцию и отрицание, пункты 5 и 6 определения модели могут быть переформулированы следующим образом:

- * $\models_x^{\mathfrak{M}^+} \phi \rightarrow \psi$ тогда и только тогда, когда для всякого $y, y \in S$:
 если $\models_y^{\mathfrak{M}^+} \phi$, то $\models_{x \sqcup y}^{\mathfrak{M}^+} \psi$,
- * $\models_x^{\mathfrak{M}^-} \phi \rightarrow \psi$ тогда и только тогда, когда для всякого $y, y \in S$:
 если $\models_y^{\mathfrak{M}^+} \phi$, то $\models_{x \sqcup y}^{\mathfrak{M}^-} \psi$.

Определение 7. Формула φ истинна в модели $\mathfrak{M}$ (пишем $\models^{\mathfrak{M}} \varphi$) тогда и только тогда, когда $\models_0^{\mathfrak{M}^+} \varphi$.

Определение 8. Формула φ общезначима в CRW (пишем $\models_{CRW} \varphi$) тогда и только тогда, когда она истинна во всякой модели $\mathfrak{M}$.

МЕТАТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА CRW

Было показано, что **CRW** является релевантной (в смысле VSP), коннексивной и непротиворечивой логикой (Тимохин, 2025). В этой секции мы покажем, что **CRW** является консервативным расширением имплицативного фрагмента релевантной логики **RW** (**R** без сокращения), а также установим адекватность семантики исчислению **CRW**. Пусть логика **L** сформулирована в имплицативно-негативном языке $\mathcal{L}$, а **L'** — в имплицативном языке $\mathcal{L}'$. Множество формул языка $\mathcal{L}$ будем обозначать как For , а языка $\mathcal{L}'$ — как For' . Говорим, что логика **L** является консервативным расширением логики **L'**, если для всякой формулы $\varphi \in For'$ выполняется следующее: $\vdash_{\mathbf{L}} \varphi$ тогда и только тогда, когда $\vdash_{\mathbf{L}'} \varphi$. Для доказательства консервативности расширения мы воспользуемся следующим переводом ϵ : $For \rightarrow For'$ (из Weiss, 2022).

1. $\epsilon(p) = p$.
2. $\epsilon(\neg\varphi) = \epsilon(\varphi)$.
3. $\epsilon(\varphi \rightarrow \psi) = \epsilon(\varphi) \rightarrow \epsilon(\psi)$.

Для доказательства теоремы о консервативности расширения нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 1. *Для всякой формулы $\varphi \in For'$: $\epsilon(\varphi) = \varphi$.*

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по построению формулы. Тривиально следует из определения перевода ϵ . $\square$

Лемма 2. *Для всякой формулы φ : если $\vdash_{\mathbf{CRW}} \varphi$, то $\vdash_{\mathbf{RW}} \epsilon(\varphi)$.*

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по длине вывода. А1–А3 одинаковы для **RW** и **CRW**. Остальные схемы **CRW** с помощью перевода ϵ сводятся к А1. $\square$

Теорема 1 (Консервативность расширения). **CRW** является консервативным расширением имплицативного фрагмента **RW**.

Доказательство. Пусть $\varphi \in For'$. Поскольку **CRW** содержит все аксиомные схемы **RW**, очевидно, что если $\vdash_{\mathbf{RW}} \varphi$, то $\vdash_{\mathbf{CRW}} \varphi$. Напротив, предположим теперь, что $\vdash_{\mathbf{CRW}} \varphi$. Тогда по лемме 2 $\vdash_{\mathbf{RW}} \epsilon(\varphi)$. Отсюда по лемме 1 получаем $\vdash_{\mathbf{RW}} \varphi$, что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 2 (Корректность). Для всякой формулы φ : если $\vdash_{\mathbf{CRW}} \varphi$, то $\models_{\mathbf{CRW}} \varphi$.

Доказательство. Доказательство ведется индукцией по длине вывода: достаточно убедиться, что каждая аксиомная схема общезначима и что применение *modus ponens* сохраняет общезначимость. Для этого удобно воспользоваться методом от противного и семантическими определениями из предыдущей секции. Рассмотрим наиболее сложные случаи: подробно — случай для A_2 , а случаи A_3 и MP — кратко.

(A₂) Пусть $\not\models_{\text{CRW}}(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\chi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\chi \rightarrow \psi))$. Тогда по определению общезначимости $\exists \mathfrak{M} : \not\models^{\mathfrak{M}}(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\chi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\chi \rightarrow \psi))$. Используя правило исключения квантора существования и определение истинности, получаем $\not\models_0^{\mathfrak{M}^+}(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\chi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\chi \rightarrow \psi))$. По определению модели, правилам исключения квантора общности и исключения конъюнкции имеем $\models_x^{\mathfrak{M}^+} \varphi \rightarrow \psi$ и $\not\models_{0 \sqcup x}^{\mathfrak{M}^+}(\chi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)$. По определению модели и правилу исключения квантора общности получаем $\not\models_y^{\mathfrak{M}^+} \varphi \dot{\vee} \models_{x \sqcup y}^{\mathfrak{M}^+} \psi$. Используя свойство нейтрального элемента, а также определение модели и правила исключения квантора существования и исключения конъюнкции, выводим $\models_y^{\mathfrak{M}^+} \chi \rightarrow \varphi$ и $\not\models_{x \sqcup y}^{\mathfrak{M}^+} \chi \rightarrow \psi$. По определению модели и правилу исключения квантора существования получаем, что $\not\models_z^{\mathfrak{M}^+} \chi \dot{\vee} \models_{y \sqcup z}^{\mathfrak{M}^+} \varphi$. По определению модели и правилам исключения квантора существования и исключения конъюнкции имеем $\models_z^{\mathfrak{M}^+} \chi$ и $\not\models_{(x \sqcup y) \sqcup z}^{\mathfrak{M}^+} \psi$. Используя $\not\models_z^{\mathfrak{M}^+} \chi \dot{\vee} \models_{y \sqcup z}^{\mathfrak{M}^+} \varphi$ и $\models_z^{\mathfrak{M}^+} \chi$, а также правило исключения дизъюнкции, получаем $\models_{y \sqcup z}^{\mathfrak{M}^+} \varphi$. Из $\not\models_{(x \sqcup y) \sqcup z}^{\mathfrak{M}^+} \psi$ по свойству ассоциативности выводим $\not\models_{x \sqcup (y \sqcup z)}^{\mathfrak{M}^+} \psi$. Применяя правило введения конъюнкции к $\models_{y \sqcup z}^{\mathfrak{M}^+} \varphi$ и $\not\models_{x \sqcup (y \sqcup z)}^{\mathfrak{M}^+} \psi$, а затем правило введения квантора существования к получившемуся выражению, получаем $\exists y \sqcup z, y \sqcup z \in S : \models_{y \sqcup z}^{\mathfrak{M}^+} \varphi \ \& \ \not\models_{x \sqcup (y \sqcup z)}^{\mathfrak{M}^+} \psi$, что по определению модели есть $\not\models_x^{\mathfrak{M}^+} \varphi \rightarrow \psi$. Таким образом, $\models_x^{\mathfrak{M}^+} \varphi \rightarrow \psi$ и $\not\models_x^{\mathfrak{M}^+} \varphi \rightarrow \psi$ противоречат друг другу.

(A₃) Пусть $\not\models_{\text{CRW}}(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$. По семантическим определениям общезначимости и исключению квантора существования получаем $\models_x^{\mathfrak{M}^+} \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$. Аналогично с помощью правила исключения дизъюнкции, свойств коммутативности и ассоциативности, введения конъюнкции, введения квантора существования и определения модели получаем противоречие — $\not\models_x^{\mathfrak{M}^+} \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$.

(MP) Докажем, что если $\models_{\text{CRW}} \varphi$ и $\models_{\text{CRW}} \varphi \rightarrow \psi$, то $\models_{\text{CRW}} \psi$. Предположим противное: пусть существуют формулы φ и ψ такие, что

$\models_{\mathbf{CRW}} \varphi$, $\models_{\mathbf{CRW}} \varphi \rightarrow \psi$ и при этом $\not\models_{\mathbf{CRW}} \psi$. Используя определение модели, получаем $\not\models_0^{m^+} \psi$ и $\models_0^{m^+} \varphi$. По снятию квантора общности, определению модели и исключению дизъюнкции получаем противоречие — $\not\models_0^{m^+} \varphi$. $\square$

Нами был адаптирован метод доказательства семантической полноты, предложенный А. Урквартом для импликативных фрагментов релевантных логик **R**, **E** и **T** (Urquhart, 1973) и модифицированный Й. Вайсом для коннексивных релевантных логик **CR**, **CM**, **CC** (Weiss, 2022). Зафиксируем следующие обозначения. Пусть $x = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ — конечная последовательность формул **CRW**, а $\emptyset$ — пустая последовательность. Пишем $x \prec \psi$, если и только если

$$\vdash_{\mathbf{CRW}} \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\varphi_n \rightarrow \psi) \dots).$$

В частности, $\emptyset \prec \varphi$ тогда и только тогда, когда $\vdash_{\mathbf{CRW}} \varphi$. Пусть x и y — конечные последовательности формул. Пишем $x \equiv y$, если x является перестановкой y . Для доказательства леммы о канонической модели нам понадобится следующее правило:

$$\text{П1. } \frac{x \prec \phi \rightarrow \psi, y \prec \phi}{x, y \prec \psi}.$$

Докажем, что данное правило может применяться в **CRW**.

Лемма 3. *Если $x \prec \varphi \rightarrow \psi$ и $y \prec \varphi$, то $x, y \prec \psi$.*

Доказательство. Доказательство проводится прямым построением вывода в **CRW** с помощью применения перестановки (A3), префикса (A2) и MP. $\square$

Докажем лемму, характеризующую операцию $\sqcup^c$ в канонической модели **CRW**.

Лемма 4. *Если $x \prec \varphi$ и $x \equiv y$, то $y \prec \varphi$.*

Доказательство. Достаточно показать, что из $x, \varphi, \psi, y \prec \chi$ выводимо $x, \psi, \varphi, y \prec \chi$. Это следует из A3, суффикса $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ и MP. $\square$

Определение 9. *Каноническая модель для **CRW** — это модель $\mathfrak{M}^c = \langle S^c, 0^c, \sqcup^c, V^c \rangle$, которая удовлетворяет следующим условиям:*

1. S^c — множество всех классов эквивалентности $[x]$ конечных последовательностей формул x ,
2. 0^c — класс эквивалентности пустой последовательности формул,

3. $\sqcup^c$ — ассоциативная коммутативная бинарная операция с нейтральным элементом такая, что $[x] \sqcup^c [y] = [xy]$,
4. $[x] \in V_c^+(p)$ тогда и только тогда, когда $[x] \prec p$,
5. $[x] \in V_c^-(p)$ тогда и только тогда, когда $[x] \prec \neg p$.

Запись xy понимается как конкатенация конечных последовательностей формул. Заметим, что отношение $\equiv$ обладает следующим свойством: $x \equiv y, z \equiv w \Rightarrow xz \equiv yw$. Операция $\sqcup^c$ в канонической модели **CRW** понимается как бинарная операция, сопоставляющая двум произвольным классам эквивалентности конечных последовательностей формул класс эквивалентности конкатенации конечных последовательностей формул: $[x] \sqcup^c [y] = [xy]$. Операция $\sqcup^c$ корректно определена в силу леммы 4 и свойства $x \equiv y, z \equiv w \Rightarrow xz \equiv yw$.

Лемма 5 (Каноническая модель). Для всякого $[x] \in S^c$ и всякой формулы φ :

- $\triangleright \models_{[x]}^{\mathfrak{M}^+} \varphi$ тогда и только тогда, когда $[x] \prec \varphi$,
- $\triangleright \models_{[x]}^{\mathfrak{M}^c-} \varphi$ тогда и только тогда, когда $[x] \prec \neg \varphi$.

Доказательство. Индукцией по построению формулы.

Базис индукции (переменная p):

1. $\models_{[x]}^{\mathfrak{M}^+} p$ тогда и только тогда, когда $[x] \prec p$,
2. $\models_{[x]}^{\mathfrak{M}^c-} p$ тогда и только тогда, когда $[x] \prec \neg p$.

Следует непосредственно из определения V^c .

Случай $\neg\varphi$:

3. $\models_{[x]}^{\mathfrak{M}^+} \neg\varphi$ тогда и только тогда, когда $[x] \prec \neg\varphi$,
4. $\models_{[x]}^{\mathfrak{M}^c-} \neg\varphi$ тогда и только тогда, когда $[x] \prec \neg\neg\varphi$.

($\models_{[x]}^{\mathfrak{M}^+} \neg\varphi \iff [x] \prec \neg\varphi$): достаточно воспользоваться индуктивными допущениями и семантическими определениями.

($\models_{[x]}^{\mathfrak{M}^c-} \neg\varphi \iff [x] \prec \neg\neg\varphi$): из $\models_{[x]}^{\mathfrak{M}^c-} \neg\varphi$ следует $\models_{[x]}^{\mathfrak{M}^+} \varphi$, откуда по индуктивному допущению $[x] \prec \varphi$. Применяя $\emptyset \prec \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ (A4) и лемму 3, получаем $[x] \prec \neg\neg\varphi$.

Обратно: из $[x] \prec \neg\neg\varphi$ и (A5) по лемме 3 выводим $[x] \prec \varphi$, откуда по индуктивному допущению получаем $\models_{[x]}^{\mathfrak{M}^+} \varphi$, по семантическому определению — $\models_{[x]}^{\mathfrak{M}^c-} \neg\varphi$.

Случай $\varphi \rightarrow \psi$:

5. $\models_{[x]}^{\mathfrak{M}^{c+}} \phi \rightarrow \psi$ тогда и только тогда, когда $[x] \prec \phi \rightarrow \psi$,

6. $\models_{[x]}^{\mathfrak{M}^{c-}} \phi \rightarrow \psi$ тогда и только тогда, когда $[x] \prec \neg(\phi \rightarrow \psi)$.

($\models_{[x]}^{\mathfrak{M}^{c+}} \varphi \rightarrow \psi \iff [x] \prec \varphi \rightarrow \psi$):

Пусть $\models_{[x]}^{\mathfrak{M}^{c+}} \varphi \rightarrow \psi$. Благодаря А1 получаем $[\varphi] \prec \varphi$. По индуктивному допущению имеем $\models_{[\varphi]}^{\mathfrak{M}^{c+}} \varphi$, а по определению модели, соглашению о $\prec$, исключению квантора общности и исключению дизъюнкции выводим $\models_{[x] \sqcup^c [\varphi]}^{\mathfrak{M}^{c+}} \psi$. По индуктивному допущению и определению операции $\sqcup^c$ получаем $[x\varphi] \prec \psi$, что по соглашению о $\prec$ есть $[x] \prec \varphi \rightarrow \psi$.

Обратно. Пусть $[x] \prec \varphi \rightarrow \psi$ и по индуктивному допущению $[y] \prec \varphi$. Отсюда по лемме 3 выводим $[xy] \prec \psi$, что по определению операции $\sqcup$ есть $[x] \sqcup^c [y] \prec \psi$. Используя определение модели, введение дизъюнкции и введение квантора общности, выводим $\models_{[x]}^{\mathfrak{M}^{c+}} \varphi \rightarrow \psi$.

($\models_{[x]}^{\mathfrak{M}^{c-}} \varphi \rightarrow \psi \iff [x] \prec \neg(\varphi \rightarrow \psi)$):

Пусть $\models_{[x]}^{\mathfrak{M}^{c-}} \varphi \rightarrow \psi$. Вновь используя А1, соглашение о $\prec$ и определение модели, получаем $\models_{[\varphi]}^{\mathfrak{M}^{c+}} \varphi$. Используя исходное допущение, определение модели, исключение квантора общности и исключение дизъюнкции, получаем $\models_{[x] \sqcup^c [\varphi]}^{\mathfrak{M}^{c-}} \psi$. Отсюда по индуктивному допущению, определению операции $\sqcup$, используя А7 и лемму 3, получаем $[x] \prec \neg(\varphi \rightarrow \psi)$.

Обратно. Пусть $[x] \prec \neg(\varphi \rightarrow \psi)$. Отсюда, применяя А6 и лемму 3, получаем $[x] \prec \varphi \rightarrow \neg\psi$. По индуктивному допущению имеем $[y] \prec \varphi$, и, используя лемму 3, получаем $[xy] \prec \neg\psi$. По определению операции $\sqcup$ и индуктивному допущению имеем $\models_{[x] \sqcup^c [y]}^{\mathfrak{M}^{c-}} \psi$. Отсюда, используя введение дизъюнкции, введение квантора общности и определение модели, получаем желаемое $\models_{[x]}^{\mathfrak{M}^{c-}} \varphi \rightarrow \psi$. $\square$

Теорема 3 (Семантическая полнота). Для всякой формулы φ : если $\models_{\text{CRW}} \varphi$, то $\vdash_{\text{CRW}} \varphi$.

Доказательство. Пусть $\models_{\text{CRW}} \varphi$. Тогда по определению общезначимости имеем, что φ истинна в канонической модели $\mathfrak{M}^c$ ($\models^{\mathfrak{M}^c} \varphi$). По

определению истинности в модели имеем $\models_{\emptyset}^{\mathfrak{M}^+} \varphi$. По лемме 5 о канонической модели выходит, что $\emptyset \prec \varphi$, а это по соглашению об обозначении есть $\vdash_{\mathbf{CRW}} \varphi$. $\square$

Совместно с теоремой о корректности получаем:

Следствие 1 (Адекватность). $\vdash_{\mathbf{CRW}} \varphi$ тогда и только тогда, когда $\models_{\mathbf{CRW}} \varphi$.

ПЕРСПЕКТИВЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КОННЕКСИВНЫХ РЕЛЕВАНТНЫХ ЛОГИК БЕЗ СОКРАЩЕНИЯ

Таким образом, удалось доказать теорему о консервативности расширения и ключевые метатеоремы для системы **CRW**: теорему о корректности и теорему о семантической полноте. Полученные результаты показывают, что противоречивость **CR** не является неизбежным следствием сочетания коннексивности и релевантности в рамках одной логической теории. Отказ от сокращения и соответствующего ему требования идемпотентности позволяет получить корректную и полную относительно семантики коммутативных моноидов систему, сохраняющую VSP и основные коннексивные тезисы, но не содержащую противоречивых теорем. Семантика **CRW** сохраняет возможность представлять локально противоречивые информационные состояния, не допуская противоречия на уровне логических законов.

Помимо открытых проблем из работы «Проблема противоречивости в релевантных коннексивных логиках» (Тимохин, 2025) интересно рассмотреть возможные расширения **CRW** и ответить на более глобальный вопрос: возможно ли найти более богатую непротиворечивую релевантную коннексивную логику?

Система **CRW** была получена путем отказа от схемы сокращения. Используя информационную интерпретацию, предложенную А. Урквартом (Urquhart, 1972), можно проинтерпретировать сокращение как возможность устранить повторяющуюся информацию. Элементы S носителя в этой интерпретации понимаются как частицы информации — произвольные множества атомарных предложений науки, — которые поддерживают (или не поддерживают) истинность или ложность пропозициональных переменных, что позволяет кодировать все четыре возможных истинностных значения. Например, запись $\models_x^{\mathfrak{M}^+} p$ означает, что истинность p поддерживается частицей информации x . В **CR**

возможен переход от $\models_x^+ p$ к $\models_{x \sqcup x}^+ p$ (и наоборот) в силу идемпотентности операции на носителе алгебры: $x \sqcup x = x$. Это означает, что можно игнорировать повторяющуюся информацию. Добавление идентичной частицы информации, поддерживающей истинность, не влияет на истинность или ложность пропозициональной переменной. В семантике **CRW** нет этого требования, поэтому $x \sqcup x$ не сводится к x , и описанная интерпретация оказывается неадекватной для семантики без сокращения.

На наш взгляд, можно предложить адекватную **CRW** интерпретацию семантики, где элементы S понимаются как эмпирические досье — конечные совокупности конкретных экспериментов, наблюдений и измерений. Один и тот же тип эксперимента может быть реализован несколькими отдельными запусками. Досье, содержащее результат одного запуска, и досье, содержащее результаты двух запусков, могут иметь различную подтверждающую силу. Поэтому операция $\sqcup$ не предполагается идемпотентной. Она объединяет два эмпирических досье с сохранением кратности входящих в них свидетельств. $x \sqcup x$ представляет досье, в котором кратность каждого свидетельства из x удвоена и в общем случае не отождествляется с x . Содержательно второе вхождение следует понимать как результат дополнительного проведения той же экспериментальной процедуры, а не как техническое копирование одной записи. $\emptyset$ — пустое эмпирическое досье. Рассмотрим пример с имплицативным утверждением. По определению модели **CRW**, x поддерживает истинность $\varphi \rightarrow \psi$, если для всякого y из S верно, что если y поддерживает истинность φ , то $x \sqcup y$ поддерживает истинность ψ . Пусть φ = «образец содержит гидроксид бария», ψ = «индикатор окрашивается в синий цвет». y — произвольное досье, подтверждающее наличие гидроксида бария в образце, а x — данные о свойствах индикатора, калибровке оборудования и повторных контролируемых опытах. Эмпирическое досье x поддерживает истинность условного высказывания «если φ , то ψ », если присоединение x к любому допустимому эмпирическому досье y , подтверждающему φ , образует досье, подтверждающее ψ . Аналогичным образом интерпретируется ложность: $\models_x^{\mathfrak{m}-} \varphi \rightarrow \psi$ означает, что досье x поддерживает ложность условного высказывания «если φ , то ψ », если присоединение x к любому эмпирическому досье y , подтверждающему φ , дает отрицательное свидетельство против ψ . Таким образом, при установлении истинностного статуса φ возможны четыре ситуации:

- ◇ x подтверждает, но не опровергает φ ,
- ◇ x опровергает, но не подтверждает φ ,
- ◇ x содержит конфликтующие свидетельства за и против φ ,
- ◇ x недостаточно для какого-либо вывода относительно φ .

Схема смешения (англ. *mingle*) $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ действует иначе: она реализует требование замкнутости множества носителей истинности относительно операции в алгебре. В своей работе Й. Вайс рассматривает также системы **СМ** (**СР** + смешение) и **СС** (**СМ** + утверждение консеквента). Для расширения **СР** за счет добавления схемы смешения — назовем его **СМ**W — потребуется модифицировать семантику **СР**W за счет добавления следующих двух пунктов в определение модели¹⁰:

1. Если $x \in V^+(p)$ и $y \in V^+(p)$, то $x \sqcup y \in V^+(p)$,
2. Если $x \in V^-(p)$ и $y \in V^-(p)$, то $x \sqcup y \in V^-(p)$.

Используя метод индукции по построению формулы, можно доказать следующую теорему для **СМ**.

Теорема 4. Для всякой модели **СМ** и для всяких $x, y \in S$ верно следующее:

1. Если $\models_x^{\mathfrak{M}^+} \varphi$ и $\models_y^{\mathfrak{M}^+} \varphi$, то $\models_{x \sqcup y}^{\mathfrak{M}^+} \varphi$,
2. Если $\models_x^{\mathfrak{M}^-} \varphi$ и $\models_y^{\mathfrak{M}^-} \varphi$, то $\models_{x \sqcup y}^{\mathfrak{M}^-} \varphi$.

Из теоремы 4 следует общезначимость всех подстановок в схему смешения. Поскольку корректность остальных аксиомных схем и сохранение общезначимости при применении *modus ponens* устанавливаются так же, как для **СР**, тем самым теорема о корректности исчисления **СМ** относительно данного класса моделей оказывается верной. Тем не менее этой семантической модификации оказывается недостаточно для **СМ**W. Атомарные условия замкнутости, достаточные для **СМ**, не обеспечивают наследование сложных формул в моноидальной семантике **СМ**W. В частности, аналог теоремы 4 неверен, так как требует идемпотентности операции $\sqcup$.

Отдельный интерес представляет рассмотрение так называемых мезоконнексивных логик. Этот термин предложен А. А. Беликовым для обозначения коннексивных логик, в которых обратные тезисы Боэция являются недоказуемыми (Belikov, 2024).

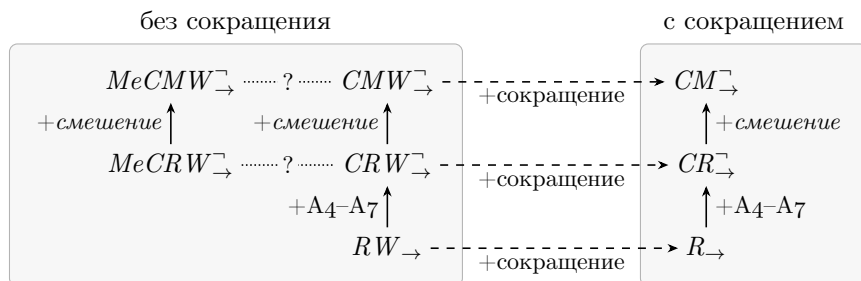
- | | |
|--|-------------------------|
| ◇ $\not\vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ | Обратный тезис Боэция 1 |
| ◇ $\not\vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi)$ | Обратный тезис Боэция 2 |

¹⁰ Аналогичным образом модифицируется **СР** для получения **СМ**.

С. Макколл обратил внимание на то, что в данных формулах нарушается содержательная связь между антецедентом и консеквентом, что критически важно для теории коннексивной импликации (McCall, 2012). Если принять позицию С. Макколла, к числу дезидерат (желаемых свойств) коннексивной логики стоило бы добавить недоказуемость обратных тезисов Боеция. Легко убедиться, что **CR** и **CRW** содержат данные формулы в качестве доказуемых. Более того, в обеих логиках обратный тезис Боеция 2 является аксиомной схемой. Коннексивные логики, в которых доказуемы обратные тезисы Боеция, принято называть гиперконнексивными (Sylvan, 1989). Как известно, многие коннексивные логики строятся по методу Х. Вансинга (Wansing, 2005) — для этого условие ложности импликации в некоторой логике заменяется на коннексивное, которое выражается схемой обратного тезиса Боеция 2: импликация ложна тогда и только тогда, когда истинность антецедента влечет ложность консеквента. В Belikov & Zaitsev, 2022 был впервые предложен метод модификации коннексивных логик, позволяющий устранить гиперконнексивность. Для этого условие ложности импликации Х. Вансинга заменяется на новое: импликация ложна тогда и только тогда, когда истинность антецедента влечет ложность консеквента или его неистинность. Остается открытым вопрос: возможно ли применить данный метод к **CRW**, сохранив непротиворечивость?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Отношения между исследуемыми в статье (в том числе гипотетическими) логиками можно проиллюстрировать следующей схемой. Сплошные стрелки обозначают аксиоматические расширения; пунктирные — добавление сокращения; точечные линии со знаком вопроса — предполагаемые, но не установленные отношения.



ЛИТЕРАТУРА

- Тимохин А. А. Проблема противоречивости в релевантных коннексивных логиках // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология. — 2025. — № 84. — С. 34–43.
- Anderson A. R., Belnap N. D. Entailment : The Logic of Relevance and Necessity. Vol. 1. — Princeton : Princeton University Press, 1975.
- Anderson A. R., Belnap N. D., Dunn J. M. Entailment : The Logic of Relevance and Necessity. Vol. 2. — Princeton (NJ) : Princeton University Press, 1992.
- Belikov A. A Simple Way to Overcome Hyperconnexivity // Studia Logica. — 2024. — Vol. 112. — P. 69–94.
- Belikov A., Zaitsev D. A Variant of Material Connexive Logic // Bulletin of the Section of Logic. — 2022. — Vol. 51, no. 2. — P. 227–242.
- Belnap N. D. Entailment and Relevance // The Journal of Symbolic Logic. — 1960. — Vol. 25, no. 2. — P. 144–146.
- Dunn J. M., Hardegree G. M. Algebraic Methods in Philosophical Logic. — New York : Oxford University Press, 2001.
- Estrada-González L., Ramírez-Cámara E. Comparison of Connexive Logics // IFCoLog Journal of Logics and Their Applications. — 2016. — Vol. 3, no. 3. — P. 341–355.
- Francez N. Relevant Connexive Logic // Logic and Logical Philosophy. — 2019. — Vol. 28. — P. 409–425.
- Humberstone L. Contra-classical Logics // Australasian Journal of Philosophy. — 2000. — Vol. 78, no. 4. — P. 438–474.
- Kapsner A. Strong Connexivity // Thought : A Journal of Philosophy. — 2012. — Vol. 1, no. 2. — P. 141–145.
- Lenzen W. Rewriting the History of Connexive Logic // Journal of Philosophical Logic. — 2022. — Vol. 51. — P. 525–553.
- McCall S. Connexive Implication // The Journal of Symbolic Logic. — 1966. — Vol. 31, no. 3. — P. 415–433.
- McCall S. A History of Connexivity // Handbook of the History of Logic. Vol. 11 / ed. by D. Gabbay, F. Pelletier, J. H. Woods. — Amsterdam : Elsevier, 2012. — P. 415–449.
- Omori H. A Simple Connexive Extension of the Basic Relevant Logic BD // IFCoLog Journal of Logics and Their Applications. — 2016. — Vol. 3, no. 3. — P. 467–478.
- Rasiowa H. An Algebraic Approach to Non-Classical Logics. — Amsterdam : North-Holland, 1974. — (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics ; 78).
- Routley R., Routley V. Negation and Contradiction // Revista Columbiana de Matematicas. — 1985. — Vol. 19, no. 1/2. — P. 201–232.
- Shapiro L., Beall J. Curry's Paradox // The Stanford Encyclopedia of Philosophy. — 2026. — URL: <https://plato.stanford.edu/entries/curry-paradox/> (visited on July 25, 2026).

- Sylvan R.* A Preliminary Western History of Sociative Logics // Bystanders' Guide to Sociative Logics. — Canberra : Australian National University, 1989. — P. 74–129. — (Research Series in Logic and Metaphysics ; 4).
- Urquhart A.* Semantics for Relevant Logics // Journal of Symbolic Logic. — 1972. — Vol. 37, no. 1. — P. 159–169.
- Urquhart A.* The Semantics of Entailment (PhD Thesis). — Pittsburgh : University of Pittsburgh, 1973.
- Wansing H.* Connexive Modal Logic // Advances in Modal Logic / ed. by R. Schmidt, I. Pratt-Hartmann, M. Reynolds, H. Wansing. — London : King's College Publications, 2005. — P. 367–383.
- Weiss Y.* Semantics for Pure Theories of Connexive Implication // The Review of Symbolic Logic. — 2022. — Vol. 15, no. 3. — P. 591–606.

Timokhin, A. A. 2026. "Zamechaniya o relevantnoy konneksivnoy logike bez sokrashcheniya [Remarks on Relevant Connexive Logic without Contraction]" [in Russian]. *Filosofiya. Zhurnal Vysshey shkoly ekonomiki [Philosophy. Journal of the Higher School of Economics]* 10 (3), 319–339.

ARSENTII TIMOKHIN

PHD STUDENT IN PHILOSOPHY

LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY (MOSCOW, RUSSIA); ORCID: 0009-0002-9250-0944

REMARKS ON RELEVANT CONNEXIVE LOGIC WITHOUT CONTRACTION

Submitted: Mar. 08, 2026. **Reviewed:** July 15, 2026. **Accepted:** Aug. 20, 2026.

Abstract: This paper presents a metatheoretical study of *CRW*, a consistent connexive relevant logic without the contraction axiom. In *CRW*, Aristotle's and Boethius' theses are provable, and the antecedents and consequents of all its implicative laws share at least one propositional variable. What distinguishes *CRW* from other connexive relevant logics with a similar class of laws is the preservation of consistency: there is no formula in *CRW* such that both it and its negation are theorems. Moreover, owing to the absence of contraction, the standard derivation of Curry's paradox is blocked in *CRW*. The semantics of *CRW* is based on the notion of a commutative monoid—an algebra with a commutative associative operation and a neutral element. These properties allow the elements of the algebra's domain to be substantively interpreted as finite collections of empirical dossiers—concrete observations, experiments, and measurements. The paper proves the soundness of the axiomatization of *CRW* and its semantic completeness with respect to the calculus. It is shown that *CRW* is a conservative extension of the implicative fragment of the relevant logic *RW*. The completeness proof employs the canonical model method, building on the technique of A. Urquhart as adapted by Y. Weiss. Together, these results establish the adequacy of the axiomatics and semantics, i. e., the coincidence of the classes of provable and valid formulas of *CRW*.

Keywords: Connexive Logic, Relevance Logic, Implication, Inconsistency, Semantic Completeness, Contraction, Curry's Paradox.

DOI: 10.17323/2587-8719-2026-3-319-339.

REFERENCES

- Anderson, A. R., and N. D. Belnap. 1975. *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*. Vol. 1. Princeton: Princeton University Press.
- Anderson, A. R., N. D. Belnap, and J. M. Dunn. 1992. *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*. Vol. 2. Princeton (NJ): Princeton University Press.
- Belikov, A. 2024. "A Simple Way to Overcome Hyperconnexivity." *Studia Logica* 112:69–94.
- Belikov, A., and D. Zaitsev. 2022. "A Variant of Material Connexive Logic." *Bulletin of the Section of Logic* 51 (2): 227–242.
- Belnap, N. D. 1960. "Entailment and Relevance." *The Journal of Symbolic Logic* 25 (2): 144–146.
- Dunn, J. M., and G. M. Hardegree. 2001. *Algebraic Methods in Philosophical Logic*. New York: Oxford University Press.
- Estrada-González, L., and E. Ramírez-Cámara. 2016. "Comparison of Connexive Logics." *IFCoLog Journal of Logics and Their Applications* 3 (3): 341–355.
- Francez, N. 2019. "Relevant Connexive Logic." *Logic and Logical Philosophy* 28:409–425.
- Humberstone, L. 2000. "Contra-classical Logics." *Australasian Journal of Philosophy* 78 (4): 438–474.
- Kapsner, A. 2012. "Strong Connexivity." *Thought: A Journal of Philosophy* 1 (2): 141–145.
- Lenzen, W. 2022. "Rewriting the History of Connexive Logic." *Journal of Philosophical Logic* 51:525–553.
- McCall, S. 1966. "Connexive Implication." *The Journal of Symbolic Logic* 31 (3): 415–433.
- . 2012. "A History of Connexivity." In *Handbook of the History of Logic*, ed. by D. Gabbay, F. Pelletier, and J. H. Woods, 11:415–449. Amsterdam: Elsevier.
- Omori, H. 2016. "A Simple Connexive Extension of the Basic Relevant Logic BD." *IFCoLog Journal of Logics and Their Applications* 3 (3): 467–478.
- Rasiowa, H. 1974. *An Algebraic Approach to Non-Classical Logics*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 78. Amsterdam: North-Holland.
- Routley, R., and V. Routley. 1985. "Negation and Contradiction." *Revista Columbiana de Matematicas* 19 (1–2): 201–232.
- Shapiro, L., and J. Beall. 2026. "Curry's Paradox." The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Accessed July 25, 2026. <https://plato.stanford.edu/entries/curry-paradox/>.
- Sylvan, R. 1989. "A Preliminary Western History of Sociative Logics." In *Bystanders' Guide to Sociative Logics*, 74–129. Research Series in Logic and Metaphysics 4. Canberra: Australian National University.
- Timokhin, A. A. 2025. "Problema protivorechivosti v relevantnykh konneksivnykh logikakh [The Problem of Inconsistency in Relevant Connexive Logics]" [in Russian]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Sotsiologiya. Politologiya [Tomsk State University Journal of Philosophy, Sociology, and Political Science]*, no. 84, 34–43.
- Urquhart, A. 1972. "Semantics for Relevant Logics." *Journal of Symbolic Logic* 37 (1): 159–169.
- . 1973. *The Semantics of Entailment (PhD Thesis)*. Pittsburgh: University of Pittsburgh.
- Wansing, H. 2005. "Connexive Modal Logic." In *Advances in Modal Logic*, ed. by R. Schmidt, I. Pratt-Hartmann, M. Reynolds, and H. Wansing, 367–383. London: King's College Publications.
- Weiss, Y. 2022. "Semantics for Pure Theories of Connexive Implication." *The Review of Symbolic Logic* 15 (3): 591–606.