Психология. Журнал Высшей школы экономики.
2007. Т. 4, № 3. С. 158–164.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ О РЕКУРРЕНТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ, ВХОДЯЩИХ В СОСТАВ ПСИХОЛОГИЧЕСКИХ ТЕСТОВ

Ю.В. ЧЕБРАКОВ

Введение

Как отмечает Айзенк (Айзенк, 1995), задачи о рекуррентных последовательностях включают в психологические тесты для того, чтобы исследовать специфические способности человека. При этом задачи могут быть изложены ***двумя*** способами.

Первый способ состоит в том, что дается задание и предъявляются несколько решений, из которых все, кроме одного, являются ложными. ***Второй*** способ состоит в том, что решение задачи испытуемый должен найти самостоятельно.

В качестве ***примера*** тестовой задачи, изложенной первым способом, рассмотрим следующее задание из широко известного теста Р. Кеттелла, применяемого для определения коэффициента интеллектуальности человека (Машков, 2003):

Укажите, какое число 10*,* 5 *или* 7 *должно находиться на месте знака вопроса в последовательности чисел*

$$\begin{array}{llllllll} n & \ldots. & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_n & \ldots. & 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & ? \end{array}$$

В этой задаче ***правильным*** ответом считается число 10. Основанием служит то, что обсуждаемая последовательность содержит два ряда чисел: 1, 1+2 = 3, 3+2 = 5, 5+2 = 7, 7+2 = = 9, ... и 2, 2+4 = 6, 6+4 = 10, 10+4 = = 14, ... Используя элементарные сведения из общей теории рекуррентных соотношений, изложенные в приложении к данной статье, легко прийти к выводу, что *на месте знака вопроса, указанного в условии задачи, может стоять* ***любое*** *из чисел* 10*,* 5 *или* 7.

Действительно,

i) набор чисел 1, 2, 3, 6, 5 не является рекуррентной последовательностью первого порядка, так как эти числа не образуют геометрической прогрессии;

ii) Если набор чисел 1, 2, 3, 6, 5 является рекуррентной последовательностью второго порядка, то справедливо уравнение

$$a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_0 a_n$$

Полагая в этом уравнении n = 1, 2, получим

$$\begin{cases} a_1 c_0 + a_2 c_1 = a_3 \\ a_2 c_0 + a_3 c_1 = a_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 + 2c_1 = 3 \\ 2c_0 + 3c_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c_0 + 4c_1 = 6 \\ 2c_0 + 3c_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_0 = 3 \end{cases}$$

Рекуррентное уравнение $a_{n+2} = 3a_n$ дает набор чисел 1, 2, 3, 6, 9, ..., который, очевидно, не совпадает с исходной числовой последовательностью. Таким образом, набор чисел 1, 2, 3, 6, 5 не является рекуррентной последовательностью второго порядка;

iii) Если набор чисел 1, 2, 3, 6, 5 является рекуррентной последовательностью третьего порядка, то справедливо уравнение

$$a_{n+3} = c_2 a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n$$

Так как для подсчета значений коэффициентов этого уравнения необходимо, чтобы исходная числовая последовательность содержала не менее шести чисел, запишем исходную последовательность в виде

$$1, 2, 3, 6, 5, m$$

Решая соответствующую систему уравнений, найдем, что обсуждаемый набор чисел образует рекуррентную последовательность порядка 3:

$$a_{n+3} = \frac{18-m}{4} a_{n+2} + 7a_{n+1} - \frac{86-3m}{4} a_n$$

Доказательство закончено.

Легко также найти, что обсуждаемая последовательность чисел 1, 2, 3, 6, 5, 10, 7, 14, 9, ... является рекуррентной последовательностью порядка 4:

$$a_{n+4} = 2a_{n+2} - a_n$$

и, следовательно, эта числовая последовательность полностью определяется заданием значений ее первых 8 чисел. Таким образом, для устранения выявленной неопределенности ответа достаточно в условии обсуждаемой задачи привести первые восемь чисел последовательности 1, 2, 3, 6, 5, 10, 7, 14, 9, ... При этом формулировка исправленного варианта задачи может выглядеть, например, следующим образом:

Укажите, какое число 14, 9 *или* 13 *должно находиться на месте знака вопроса в последовательности чисел*

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1	2	3	6	5	10	?

Цель следующего раздела — продемонстрировать, что задачи, имеющие неоднозначный ответ, могут встретиться и среди известных тестовых задач, изложенных вторым способом.

Исследование задач, входящих в состав «Числового теста» Г. Айзенка

В данном разделе исследуем 16 задач о рекуррентных последовательностях, входящих в состав широко известного «Числового теста» Г. Айзенка (Айзенк, 1995). Все эти задачи изложены вторым способом (см. введение) и имеют в «Числовом тесте» Г. Айзенка номера, указанные в скобках рядом с порядковым номером задачи.

Для каждой из исследуемых задач 1–16 далее приводится несколько ответов. Ответ 1 всегда содержит способ решения задачи, предлагаемый Г. Айзенком. Ответы 2 и 3 содержат некоторые альтернативные решения. Если хотя бы одно из решений, приводимых в ответах 1, 2, 3, отличается от других, то указывается новая формулировка задачи, позволяющая устранить неопределенность ответа. Если в ответе 1 рекуррентное соотношение приводится в круглых скобках, то это означает, что оно добавлено к решению Г. Айзенка автором данной работы.

1(1). *Продолжите числовой ряд*

n	1	2	3	4	5
a_n	18	20	24	32	?

Ответ 1: $a_{n+1} = a_n + 2^n$
и $a_5 = 32 + 2^4 = 48$
Ответ 2: $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$
и $a_5 = 3\times32 - 2\times24 = 48$

2(3). *Продолжите числовой ряд*

n	1	2	3	4	5
a_n	212	179	146	113	?

Ответ 1: $a_{n+1} = a_n - 33$
и $a_5 = 113 - 33 = 80$
Ответ 2: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$
и $a_5 = 2\times113 - 146 = 80$

3(5). *Продолжите числовой ряд*

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	6	8	10	11	14	14	?

Ответ 1: Последовательность содержит два ряда чисел:
6, 6 + 4 = 10, 10 + 4 = 14, 14 + 4 = = 18, ... и
8, 8 + 3 = 11, 11 + 3 = 14, 14 + 3 = = 17, ...
и $a_7 = 18$ (рекуррентное соотношение имеет вид $a_{n+4} = 2a_{n+2} - a_n$).
Ответ 2: $a_{n+3} = (-8a_{n+2} + 50a_{n+1} - 3a_n)/22$
и $a_7 = (-8\times14 + 50\times14 - 13\times11)/22 = 20\,5/22$

Для устранения выявленной неопределенности ответа формулировку задачи ***необходимо изменить*** следующим образом:
Продолжите числовой ряд

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	6	8	10	11	14	14	18	17	?

4(8). *Продолжите числовой ряд*

n	1	2	3	4	5
a_n	7	13	24	45	?

Ответ 1: $a_{n+1} = 2a_n - n$
и $a_5 = 2\times45 - 4 = 86$
(рекуррентное соотношение имеет вид $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$)
Ответ 2: $a_{n+2} = -3a_{n+1} + 9a_n$
и $a_5 = -3\times45 + 9\times24 = 81$

Для устранения выявленной неопределенности ответа формулировку задачи ***необходимо изменить*** следующим образом:
Продолжите числовой ряд

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	7	13	24	45	86	167	?

5(10). *Продолжите числовой ряд*

n	1	2	3	4	5	6
a_n	4	5	7	11	19	?

Ответ 1: $a_{n+1} = a_n + 2^{n-1}$
и $a_6 = 19 + 2^4 = 35$
Ответ 2: $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$

и $a_6 = 3\times19 - 2\times11 = 35$

6(12). *Продолжите числовой ряд*

n 1 2 3 4 5 6
a_n .... 6 7 9 13 21 ?

Ответ 1: $a_{n+1} = 2a_n - 5$
и $a_6 = 2\times21 - 5 = 37$
Ответ 2: $a_{n+1} = a_n + 2^{n-1}$
и $a_6 = 21 + 2^4 = 37$
Ответ 3: $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$
и $a_6 = 3\times21 + 2\times13 = 37$

7(14). *Продолжите числовой ряд*

n 1 2 3 4 5 6
a_n .... 64 48 40 36 34 ?

Ответ 1: $a_{n+1} = a_n - 2^{5-n}$
и $a_6 = 34 - 1 = 33$
Ответ 2: $a_{n+2} = (3a_{n+1} - a_n)/2$
и $a_6 = (3\times34 - 36)/2 = 33$

8(17). *Продолжите числовой ряд*

n 1 2 3 4 5 6 7
a_n .... 15 13 12 11 9 9 ?

Ответ 1: Последовательность содержит два ряда чисел:
15, 15 − 3 = 12, 12 − 3 = 9, 9 − 3 = = 6, ... и
13, 13 − 2 = 11, 11 − 2 = 9, 9 − 2 = = 7, ...
и $a_7 = 6$ (рекуррентное соотношение имеет вид $a_{n+4} = 2a_{n+2} - a_n$)
Ответ 2: $a_{n+3} = (-7a_{n+2} - 3a_{n+1} + 17a_n)/12$
и $a_7 = (-7\times9 - 3\times9 + 17\times11)/12 = 8\,{}^{1}/_{12}$

Для устранения выявленной неопределенности ответа формулировку задачи ***необходимо изменить*** следующим образом:

Продолжите числовой ряд

n 1 2 3 4 5 6 7 8 9
a_n .... 15 13 12 11 9 9 6 7 ?

9(19). *Вставьте пропущенное число*

n 1 2 3 4 5 6 7
a_n .... 11 12 14 ? 9 26 42

Ответ 1: $a_{n+1} = 2a_n - 10$
и $a_4 = 2\times14 - 10 = 18$
Ответ 2: $a_{n+1} = a_n + 2^{n-1}$
и $a_4 = 14 + 2^2 = 18$
Ответ 3: $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$
и $a_4 = 3\times14 + 2\times12 = 18$

10(29). *Продолжите числовой ряд*

n 1 2 3 4 5
a_n .... 172 84 40 18 ?

Ответ 1: $a_{n+1} = a_n/2 - 2$
и $a_5 = 18/2 - 2 = 7$
Ответ 2: $a_{n+2} = (3a_{n+1} - a_n)/2$
и $a_5 = (3\times18 - 40)/2 = 7$

11(30). *Продолжите числовой ряд*

n 1 2 3 4 5
a_n .... 1 5 13 29 ?

Ответ 1: $a_{n+2} = a_{n+1} + 2(a_{n+1} - a_n) = 3a_{n+1} - 2a_n$
и $a_5 = 3\times29 - 2\times13 = 61$
Ответ 2: $a_{n+1} = a_n + 2^{n+1}$
и $a_5 = 29 + 2^5 = 61$

12(33). *Продолжите числовой ряд*

n 1 2 3 4 5
a_n .... 0 3 8 15 ?

Ответ 1: $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$
и $a_5 = 15 + 2\times4 + 1 = 24$

Ответ 2: $a_n = n^2 - 1$
и $a_5 = 25 - 1 = 24;$
рекуррентное соотношение имеет вид $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$
Ответ 3: $a_{n+2} = (24a_{n+1} - 19a_n)/9$
и $a_5 = (24\times15 - 19\times8)/9 = 23\ ^1/_9$

Для устранения выявленной неопределенности ответа формулировку задачи ***необходимо изменить*** следующим образом:

Продолжите числовой ряд

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	3	8	15	24	35	?

13(37). *Продолжите числовой ряд*

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	4	7	9	11	14	15	19	?

Ответ 1: Последовательность содержит два ряда чисел:
4, 4 + 5 = 9, 9 + 5 = 14, 14 + 5 = 19, ... и
7, 7 + 4 = 11, 11 + 4 = 15, 15 + 4 = 19, ...
и a_8 = 19 (рекуррентное соотношение имеет вид $a_{n+4} = 2a_{n+2} - a_n$).
Ответ 2: $a_{n+4} = (19a_{n+3} + 75a_{n+2} - 114a_{n+1} + 10a_n)/9$
и $a_8 = (19\times19 + 75\times15 - 114\times14 + 10\times11)/9 = 0$

Для устранения выявленной неопределенности ответа формулировку задачи ***необходимо изменить*** следующим образом:

Продолжите числовой ряд

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	4	7	9	11	14	15	19	19	?

14(45). *Продолжите числовой ряд*

n	1	2	3	4	5
a_n	857	969	745	1193	?

Ответ 1: $a_{n+1} = a_n + (-2)^{n-1}\times112$
и $a_5 = 1193 - 2^3\times112 = 297$
Ответ 2: $a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n$
и $a_5 = -1193 + 2\times745 = 297$

15(48). *Продолжите числовой ряд*

n	1	2	3	4	5
a_n	7	19	37	61	?

Ответ 1: $a_{n+1} = a_n + 6(n + 1)$
и $a_5 = 61 + 6\times5 = 91$
Ответ 2: $a_n = 3n(n + 1) + 1$
и $a_5 = 3\times5\times6 + 1 = 91$;
рекуррентное соотношение имеет вид $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$
Ответ 3: $a_{n+2} = (46a_{n+1} - 35a_n)/17$
и $a_5 = (46\times61 - 35\times37)/17 = 88\ ^{15}/_{17}$

Для устранения выявленной неопределенности ответа формулировку задачи ***необходимо изменить*** следующим образом:

Продолжите числовой ряд

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	7	19	37	61	91	127	?

16(49). *Продолжите числовой ряд*

n	1	2	3	4	5
a_n	5	41	149	329	?

Ответ 1: $a_n = 36(n - 1)^2 + 5$
и $a_5 = 36\times6 + 5 = 581$ (рекуррентное соотношение имеет вид $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$)
Ответ 2: $a_{n+2} = (62a_{n+1} - 121a_n)/13$
и $a_5 = (62\times329 - 121\times149)/13 = 182\ ^3/_{13}$

Для устранения выявленной неопределенности ответа формулировку задачи ***необходимо изменить*** следующим образом:

Продолжите числовой ряд

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	5	41	149	329	581	905	?

Литература

Айзенк Г. Проверьте свои способности. СПб.: Лань, 1995.

Машков В.Н. Введение в психологию человека. СПб.: Изд-во В.А. Михайлова, 2003.

Маркушевич А.И. Возвратные последовательности. М.: Наука, 1983.

Чебраков Ю.В. Числа и линейные уравнения. СПб.: Изд-во БПА, 2006.

Приложение

Числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1,\,2,\,...,\,N}$ называется ***рекуррентной*** последовательностью порядка k (Маркушевич, 1983), если для членов этой последовательности выполняется рекуррентное соотношение

$$a_{n+k} = c_{k-1}a_{n+k-1} + c_{k-2}a_{n+k-2} + ... + c_0a_n.$$

Пусть $\{a_n\}_{n=1,\,2,\,...,\,N}$ — некоторая рекуррентная последовательность целых чисел. Объясним, каким образом можно найти ***минимальный*** порядок k этой последовательности (Чебраков, 2006):

1) Предположим, что $k = 1$. Тогда для членов последовательности $\{a_n\}_{n=1,\,2,\,...,\,N}$ должно выполняться рекуррентное уравнение

$$a_{n+1} = c_0a_n,$$

что возможно только в том случае, если $\{a_n\}_{n=1,\,2,\,...,\,N}$ является геометрической прогрессией (со знаменателем a_2/a_1).

2) Если $k \neq 1$, то предположим, что $k = 2$. Тогда для членов последовательности должно выполняться рекуррентное уравнение

$$a_{n+2} = c_1a_{n-1} + c_0a_n,$$

Полагая в этом уравнении $n = 1, 2$, получим систему из двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1c_0 + a_2c_1 = a_3 \\ a_2c_0 + a_3c_1 = a_4 \end{cases}$$

где

$$c_0 = \frac{a_3a_3 - a_2a_4}{a_1a_3 - a_2a_2} \text{ и } c_1 = \frac{a_1a_4 - a_2a_3}{a_1a_3 - a_2a_2}$$

Таким образом, если $k = 2$, то должно выполняться рекуррентное соотношение

$$a_{n+2} = \left(\frac{a_1a_4 - a_2a_3}{a_1a_3 - a_2a_2}\right)a_{n+1} + \left(\frac{a_3a_3 - a_2a_4}{a_1a_3 - a_2a_2}\right)a_n$$

С помощью полученного соотношения построим набор чисел $\{a_j\}^*_{j=3,\,4,\,...,\,N}$. Если окажется, что при $j = 3, 4, ..., N$ $a_j = a^*_j$, то, значит, $k = 2$.

3) Если $k \neq 2$, то предположим, что $k = 3$ и т.д.

… … … … … … …

l) Если $k \neq l - 1$, то предположим, что $k = l$. Тогда для членов последовательности должно выполняться рекуррентное уравнение

$$a_{n+k} = c_{k-1}a_{n+k-1} + c_{k-2}a_{n+k-2} + ... + c_0a_n.$$

Полагая в этом уравнении $n = 1, 2, ..., k$, получим систему из k линейных уравнений:

$$\begin{aligned} &a_1c_0 + ... + a_{k-1}c_{k-2} + a_kc_{k-1} = a_{k+1} \\ &a_2c_0 + ... + a_kc_{k-2} + a_{k+1}c_{k-1} = a_{k+2} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_kc_0 + ... + a_2c_{k-2} + a_{2k-1}c_{k-1} = a_{2k} \end{aligned}$$

Матрицу коэффициентов этой системы обозначим через $A = A_{k\times k}$, столбец из неизвестных коэффициентов $c_0, c_1, ..., c_{k-1}$ — через $C = C_{k\times 1}$ и столбец из свободных членов $a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_{2k}$ — через $B = B_{k\times 1}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k & a_{k+1} & \dots & a_{2k-1} \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_{k-1} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_{k+2} \\ \dots \\ a_{2k} \end{pmatrix}$$

Тогда полученную систему уравнений можно представить в матричной форме $AC = B$. Откуда

$$C = A^{-1}B$$

Подставив вычисленные значения C в рекуррентное соотношение, построим набор чисел $\{a_j\}^*_{j=k+1,\,k+2,\,...,\,N}$:

$$a_j^* = R(_j)A^{-1}B,$$

где $R(_j)$ — строка размерности $1\times k$, содержащая следующие элементы последовательности $\{a_n\}_{n=1,\,2,\,...,\,N}$: $a_j, a_{j+1}, ..., a_{j+k-1}$. Если окажется, что при $j = k + 1, k + 2, ..., N$ $a_j = a^*_j$, то, значит, $k = l$.

Чебраков Юрий Владимирович, Санкт-Петербургский институт машиностроения, доктор технических наук, профессор

Контакты: gchebra@mail.ru