Психология. Журнал Высшей школы экономики.
2006. Т. 3, № 3. С. 112–129.

ПАРАДИГМА МАКСИМИЗАЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ (ОБЗОР ОДНОГО НАПРАВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ)

Ф.Т. АЛЕСКЕРОВ

Алескеров Фуад Тагиевич — заведующий кафедрой высшей математики факультета экономики ГУ ВШЭ, заведующий лабораторией Института проблем управления РАН, директор Центра исследования политических процессов Института проблем управления РАН, доктор технических наук, профессор.
Автор книг: «Выбор вариантов (основы теории)» (в соавт., 1990), «Выборы. Голосование. Партии» (в соавт., 1995), «Теория выбора» (в соавт., 1995, на английском языке), «Эрроувские модели агрегирования» (1999, на английском языке), «От выборов к коалиции: как принимаются политические решения» (в соавт., 1999, на турецком языке), «Максимизация полезности, выбор и предпочтение» (в соавт., 2002, на английском языке), «Бинарные отношения, графы и коллективные решения» (в соавт., 2006).

Резюме

Рассматриваются различные версии парадигмы максимизации полезности и задача представления предпочтений и функций выбора функциями полезности. Приводятся результаты в классическом случае (при отсутствии порога сравнения) и с порогом, зависящим от одной альтернативы. Построены модели, в которых порог зависит от двух сравниваемых альтернатив и/или допустимого множества альтернатив. Предложена и проанализирована модель выбора, описывающая концепцию выбора Г. Саймона.

Экономическая психология и экономика уделяют большое внимание изучению выбора. Приобретая услуги и товары, люди выбирают. Они выбирают одежду и обувь, технику и летний отдых, продукты в магазине, пищу в ресторане и многое другое. Эта статья посвящена математическим моделям, описывающим процессы выбора у людей. В этих моделях производится абстрагирование от содержания, от того, что человек выбирает. Модели описывают только формальные аспекты выбора, например: будет ли предпочтение товара x товару y, а товара y — товару z означать непременное предпочтение товара x товару z.

Однако в данной статье не содержится эмпирических данных, указывающих на то, какие из этих моделей более соответствуют действительности. Получение таких данных — предмет экспериментальных исследований, которыми автор не занимается. По всей видимости, однако, в различных сферах люди осуществляют выбор по-разному, что и должно описываться различными моделями.

Основные понятия и история проблемы

Индивидуум выбирает ту из множества альтернатив, доступных для выбора, которая доставляет ему максимум пользы; эта парадигма максимизации полезности восходит, по меньшей мере, к работам Дж. Бентама (Bentham, 1789) и является краеугольным камнем в тех областях социальных наук, в которых используются модели индивидуального выбора (Aumann, 1986). К этим областям относятся некоторые разделы экономики, психологии, теории игр, теории принятия решений, политологии и т. д.

Но что такое полезность? В XIX в. такие экономисты, как В.С. Джевонс, К. Менгер и Л. Вальрас (см., например: Blaug, 1997), сформулировали понятие кардинальной функции полезности. Это понятие означает, что полезность комбинации двух альтернатив представляет собой сумму полезностей каждой из альтернатив порознь.

В начале XX в. идея кардинальной полезности была подвергнута критике В. Парето (Pareto, 1889), который предложил в противопоставление концепции кардинальной полезности концепцию полезности ординальной. Концепция ординальной полезности заключается в следующем. Существует множество A возможных альтернатив для индивидуума. Например, это могут быть наборы товаров для потребителя. Предполагается, что множество A разбито на так называемые классы неразличимости. Если альтернативы x и y принадлежат к одному и тому же классу неразличимости, то это означает, что индивидууму все равно, какую из них выбрать. Классы неразличимости упорядочены: если альтернативы x и y находятся в различных классах неразличимости, то индивидуум обязательно предпочитает одну альтернативу другой, например, альтернативу x альтернативе y. Более того, он предпочитает любую альтернативу, неразличимую с x, любой альтернативе, неразличимой с y.

Каждому классу неразличимости можно приписать число с тем ограничением, что если один класс предпочитается другому, то альтернативы из него должны получить большее значение полезности. Значения полезности, приписываемые альтернативам, не важны; единственным ограничением является то, что более предпочитаемые альтернативы должны иметь большие значения. Именно в этом состоит идея ординальной полезности.

Это обстоятельство сразу позволяет воспользоваться формализмом теории бинарных отношений. На языке этого формализма можно сказать, что индивидуум имеет отношение предпочтения P на множестве альтернатив. Если он должен выбрать между альтернативами x и y, то он выбирает ту альтернативу, которая для него более предпочтительна по отношению P. Если, например, он предпочитает альтернативу x альтернативе y, это обозначается как xPy.

Таким образом, мы задали процессы выбора двумя способами: через предпочтения индивидуумом одних предметов другим (модель максимизации предпочтения) и через максимизацию значений чисел, приписываемых классам неразличимости (модель максимизации полезности). Возникает вопрос: в каком случае модель максимизации полезности и модель максимизации предпочтения эквивалентны? Другими словами, в каком случае тот факт, что x предпочтительнее y, одновременно описывается условием, что полезность x больше полезности y:

$$xPy \text{ в том и только том случае, если } u(x)-u(y)>0. \quad (1)$$

Оказывается, что для этого отношение P должно быть слабым порядком, т. е. удовлетворять двум ограничениям.

Во-первых, оно должно быть транзитивным, т. е. из того, что индивидуум предпочитает альтернативу x альтернативе y и альтернативу y альтернативе z, должно следовать, что он предпочитает альтернативу x альтернативе z.

Во-вторых, отношение неразличимости для слабого порядка P (x неразличимо с y, если x не предпочитается y и y не предпочитается x) должно также быть транзитивным: если x неразличимо с y и y неразличимо с z, то x неразличимо с z.

Таким образом, модель максимизации полезности оказывается эквивалентна модели максимизации предпочтения, если в последней отношение предпочтения P удовлетворяет указанным двум условиям транзитивности.

Отметим, что всегда наблюдается некоторая флуктуация откликов испытуемого на стимулы, что предопределяет применение в психологии моделей, имеющих статистический характер. Описываемые же в этой статье модели не учитывают этого аспекта случайных отклонений. Зато они задают структурные ограничения, определяют «допустимые границы». Эти модели соответствуют реальным данным с большей или меньшей степенью точности. Применение статистических методов позволяет оценить, является ли эта степень точности удовлетворительной.

Например, представим, что мы наблюдаем предпочтения индивидуума, производящего парные сравнения. Если эти сравнения производятся индивидуумом по принципам классической модели максимизации полезности, то, как уже говорилось, наблюдаемое предпочтение должно удовлетворять двум типам транзитивности. На практике, однако, с учетом случайной компоненты отклика могут происходить некоторые отклонения от этой идеализированной модели. Насколько эти отклонения велики и можно ли, несмотря на них, считать, что модель адекватно описывает реальный выбор,— задача статистических методов.

Парадигма максимизации полезности была подвергнута обобщению. Фундаментальный вклад в теорию полезности был сделан в 1938 г. П. Самуэльсоном (Samuelson, 1938), который предложил вместо довольно трудной проверки выполнения вышеупомянутых условий транзитивности построить теорию на наблюдении реального выбора из множеств альтернатив, который осуществляется индивидуумом.

Этот подход к моделированию поведения состоит в непосредственном анализе актов выбора и формализации этого процесса через понятие функции выбора. Используя математическую терминологию, функцию выбора можно истолковать как отображение, которое каждому подмножеству (предъявлению) X множества вариантов A ставит в соответствие множество выбранных вариантов C(X). Естественно, что функция C дополнительно ограничена условием, которое требует, чтобы выбранные варианты присутствовали в допустимом (предъявленном к выбору) множестве. Иначе говоря, нельзя из множества выбрать альтернативу, которой не было в этом множестве.

В контексте теории потребительского выбора П. Самуэльсон ввел знаменитую аксиому согласованности результатов выбора, впоследствии названную слабой аксиомой выявленных предпочтений (WARP — weak axiom of revealed preferences). Из этой аксиомы следует, что потребительский выбор может быть эквивалентно описан как моделью максимизации полезности, так и моделью парно-доминантного выбора с предпочтением P в виде отношения слабого порядка.

Теория выявленного предпочтения П. Самуэльсона была развита многими учеными в 1950–1970 гг. в весьма абстрактной форме (см., например: Chipman, 1960; Houthakker, 1950; Richter, 1966; 1971; Sen, 1987; Schwartz, 1972). В соответствии с этой моделью предполагается, что имеется универсальное множество альтернатив A и множество допустимых подмножеств A, которые могут быть предъявлены индивидууму. Выбор индивидуума на каждом допустимом множестве X описывается значением C(X) и таким образом порождается функция выбора $C(\cdot)$. Изучаются свойства такой функции и формализуются характеристические условия (так называемые аксиомы рациональности), которые гарантируют, что функция выбора может быть описана в терминах модели максимизации полезности.

В фундаментальной работе К. Эрроу (Arrow, 1959) была установлена взаимосвязь всех этих трех моделей: максимизации полезности, максимизации слабого порядка и выбора, удовлетворяющего аксиомам рациональности. Эта линия исследований была продолжена многими учеными, среди которых надо особенно выделить вклад А. Сена (см., например: Sen, 1993; 1994). В этих работах вопрос о том, как может быть описан классически рациональный выбор, получил исчерпывающее объяснение (обзор этих работ см., например: Айзерман, Алескеров, 1990; Aizerman, Aleskerov, 1995).

Недостатки классической модели

Однако недостатки классической модели осознавались все эти годы. Были выдвинуты три фундаментальные альтернативы модели рационального выбора, основанной на парадигме максимизации полезности.

Во-первых, Г. Саймон предложил модель ограниченной рациональности (Simon, 1982). Он утверждал, что индивидуум не всегда ищет лучшие альтернативы в множестве допустимых альтернатив, но готов согласиться с теми альтернативами, которые он считает удовлетворительными.

Во-вторых, А. Сен в своих классических мыслительных экспериментах продемонстрировал, что рациональное поведение не всегда основано на максимизации полезности (Sen, 1997).

Наконец, Д. Канеман и А. Тверски в работах по экспериментальной психологии (Kahneman, Tverski, 2000) показали, что индивидуум часто не следует парадигме максимизации полезности, и предложили свое объяснение наблюдаемым эффектам.

Впрочем, еще в 1930-е гг. Н. Георгеску-Реген (Georgescu-Roegen, 1936), а затем и В. Армстронг (Armstrong, 1939) отмечали, что одно из ключевых предположений парадигмы максимизации полезности — транзитивность отношения безразличия — представляется весьма спорным. Основная проблема состоит в пороговом характере распознавания различий между альтернативами, на что первым обратил внимание немецкий психофизик Г. Фехнер (Fechner, 1860) и что подчеркивалось многими исследователями, в частности, великим математиком А. Пуанкаре (Poincaré, 1903). Ниже приводится цитата из работы Р.Д. Льюса, где дается объяснение причины нетранзитивности отношения неразличимости: «Индивидуум может быть безразличен между 100 и 101 гранами (*1 гран = 64.8 мг. — Примеч. мое*) сахара в кофе, безразличен между 101 и 102 гранами... и безразличен между 4999 и 5000 гранами. Если бы безразличие было транзитивно, он был бы безразличен между 100 и 5000 гранами, что, возможно, неверно» (Luce, 1956, p. 179).

Еще более ранний пример такого рода — «парадокс кучи»— обсуждался греческими философами: одна песчинка не является кучей, добавление еще одной песчинки также кучи не создает. Так, добавляя по одной песчинке, можно получить кучу, но где тот шаг, до которого множество песчинок не является кучей, а после которого мы получаем кучу? В логике парадокс кучи относится к так называемым парадоксам с неопределенными границами.

Блестящий пример нарушения транзитивности отношения предпочтения привел В. Армстронг: пусть родители хотят подарить ребенку подарок — велосипед или пони (Armstrong, 1950). Ребенку эти две альтернативы безразличны, но если подарком будет велосипед, то он предпочел бы велосипед со звонком велосипеду без звонка. Если обозначить альтернативы через ВЗ (велосипед со звонком), В (велосипед без звонка) и П (пони), то имеем безразличие между ВЗ и П и между П и В, однако ВЗ предпочтительнее, чем В, что нарушает транзитивность безразличия.

Итак, одно из направлений критики парадигмы ординальной полезности, предложенной В. Парето, состояло в том, что эта парадигма требует транзитивности отношения неразличимости. Поэтому предлагалось вернуться к парадигме кардинальной полезности. Действительно, если полезность может быть измерена на оси действительных чисел, как, например, вес, то отношение безразличия уже не должно быть транзитивным.

Однако в 1950-е гг. Р.Д. Льюс (Luce, 1956), а также Д. Скотт и П. Сапс (Scott, Suppes, 1958) разработали формальную модель, которая позволяла учесть нетранзитивность неразличимости, не прибегая к понятию кардинальной полезности.

Эта модель в терминах предпочтений и выбора описывается следующим образом. Индивидуум имеет ординальную функцию полезности u, определенную на множестве альтернатив, и задается еще неотрицательное действительное число ε, называемое порогом. Если индивидуум должен выбрать из множества X допустимых альтернатив, то он выбирает такую альтернативу y, при которой не существует другой альтернативы x, для которой $u(x)-u(y) > \varepsilon$. Другими словами, x предпочтительнее, чем y, в том и только том случае, если полезность $u(x)$ больше $u(y)$ с учетом порога ε. В случае же, если индивидуум выбирает из множества X, пользуясь отношением предпочтения, он выбирает альтернативы, максимальные по этому предпочтению. Эта модель называется моделью пороговой максимизации полезности.

Обобщая определение функции выбора, рационализируемой функцией полезности, можно сказать, что функция выбора C рационализируема пороговой функцией полезности, если для всех X функция $C(X)$ состоит из таких альтернатив, которые имеют максимальное значение функции u на X с учетом порога, т. е. включают такие альтернативы y из X, при которых не существует альтернативы x из X, имеющей значение $u(x)$ большее, чем $u(y)$ с учетом ε.

Обратим внимание на то, что теперь две альтернативы неразличимы, если разница значений полезности меньше значения ε. Но тогда очевидно, что отношение безразличия нетранзитивно, так как разница значений $u(x)$ и $u(y)$ может быть меньше ε, разница значений $u(y)$ и $u(z)$ может быть меньше ε, но разница значений $u(x)$ и $u(z)$ может быть уже больше ε.

Так как отношение неразличимости нетранзитивно, то соответствующее отношение предпочтения P не является слабым порядком. Такое отношение Р.Д. Льюс назвал полупорядком.

Структурные свойства этих и других упоминаемых ниже отношений мы изучим в последующих разделах статьи.

Понятие порога тесно связано с понятием минимально различимого порога в психофизике: при заданной интенсивности стимула, например, веса w, минимально различимый порог — это такое минимальное приращение $j(w)$, при котором $w+j(w)$ распознается индивидуумом как более тяжелый, чем вес w. Но, поскольку ответы индивидуума могут несколько флуктуировать, в психофизике, как мы уже говорили, используется статистический подход. Как писал Р.Д. Льюс, «теория, которую мы построим, приводит к нестатистическому аналогу понятия минимально различимого порога в психофизике» (Luce, 1956).

В модели Р.Д. Льюса порог является постоянной величиной, не зависящей от альтернатив. Обобщение этой модели приводит к порогу $\varepsilon(x) \geq 0$, зависящему от альтернатив.

Пороговое значение ε может быть также и отрицательным, что можно показать на реальных экспериментах. Например, при сравнении весов такой порог возникает, если вес объекта ошибочно идентифицирован как более легкий по сравнению с весом другого объекта.

Предпочтение между двумя альтернативами может зависеть от контекста сравнения, т. е. от допустимого множества X, в котором находятся сравниваемые альтернативы. Например, рассмотрим выбор блюд в ресторане. Кто-то может предпочесть мясо рыбе (или наоборот) в зависимости от вина, которое есть в меню. Это ведет к созданию моделей контекстно-зависимого выбора (Aizerman, Aleskerov, 1995).

В ряде работ начиная с 1987 г. были рассмотрены модели максимизации полезности с порогами, зависящими от допустимого множества и, возможно, от сравниваемых альтернатив, т. е. с порогами вида $\varepsilon = \varepsilon(x, y, X)$ и $\varepsilon = \varepsilon(X)$ (см.: Агаев, Алескеров, 1983; Agaev, Aleskerov, 1993; Aleskerov, Vol'skiy, 1987).

В этих работах исследовался, в частности, вопрос о том, каким условиям должно удовлетворять отношение предпочтения, рационализирующее функцию выбора, которая порождается функцией полезности с порогом, зависящим от контекста X.

Все эти результаты привели к построению исчерпывающей теории, основанной на парадигме максимизации полезности и ее обобщениях:

– с нулевым порогом, $\varepsilon = 0$;

– с постоянным порогом, $\varepsilon = const$;

– с порогом, зависящим от одной альтернативы, $\varepsilon = \varepsilon(x)$;

– с порогом, зависящим от обеих сравниваемых альтернатив, $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$;

– с порогом, зависящим от обеих сравниваемых альтернатив и допустимого множества альтернатив, $\varepsilon = \varepsilon(x, y, X)$;

– с порогом, зависящим только от допустимого множества альтернатив, $\varepsilon = \varepsilon(X)$.

Все эти модели могут быть применены к описанию реальных процессов выбора, совершаемых человеком. Каждая может быть приложима к выбору в одних случаях и неприменима в других.

Ниже последовательно рассматриваются все эти модели. Показываются структурные ограничения на отношение предпочтения, к которым приводят эти модели.

Максимизация полезности: классический случай

Далее для простоты будем рассматривать конечное множество вариантов A. Пусть P — бинарное отношение на A. Введем несколько понятий, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Отношение P называется:

– антирефлексивным, если для любого x из A отношение P не содержит пар вида (x, x), т. е. x не может быть лучше самого себя;

– связным, если для любых двух различных альтернатив либо x лучше y, либо же y лучше x;

– транзитивным, если для всех x, y, z из того, что x лучше, чем y, а y лучше, чем z, следует, то x должен быть лучше, чем z;

– отрицательно транзитивным, если выполняется условие транзитивности по отсутствию предпочтения: если x не лучше, чем y, а y не лучше, чем z, то x должен быть не лучше, чем z.

Если отношение P имеет смысл строгого предпочтения индивидуума (отношение «лучше, чем»), то условия антирефлексивности, транзитивности и отрицательной транзитивности определяют структурные ограничения, которыми ограничивается возможная нерациональность поведения индивидуума.

Отношение P называется:

– частичным порядком, если P антирефлексивно и транзитивно;

– слабым порядком, если P — частичный порядок, удовлетворяющий условию отрицательной транзитивности;

– линейным порядком, если P — связный слабый порядок.

Теперь можно дать ответ на вопрос, какими структурными свойствами должно обладать отношение P, чтобы представление (1) имело место.

Оказывается, что P должно быть слабым порядком, а в том случае, когда нет альтернатив, имеющих одинаковые значения полезности, P должно быть линейным порядком.

Это утверждение устанавливает, когда функция полезности имеет представление через предпочтение (бинарное отношение) и, наоборот, когда предпочтение представляется в виде числовой функции, т. е. дает полное структурное описание классической модели ординальной полезности.

Вторая часть этого утверждения была доказана впервые В. Парето (Pareto, 1889), а первая — Е. Шредером (Schröder, 1890–1895). Для бесконечного случая доказательство первой части утверждения дано Г. Кантором (Cantor, 1895).

Функции выбора в их абстрактной формулировке начали изучаться с начала 1950-х гг. (обзор этих работ см.: Aleskerov, Monjardet, 2002).

Максимизация пороговой полезности: классический случай

Рассмотрим теперь пороговую модель при $\varepsilon(y)\geq 0$ (в частности, ε = const>0), т. е. исследуем свойства отношений, которые представимы в виде:

xPy в том и только том случае, если

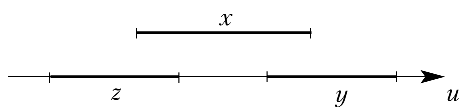
$$u(x)-u(y)>\varepsilon(y), \qquad (2)$$

т. е. x предпочтительнее, чем y, если и только если разность значений полезности $u(x)$ и $u(y)$ превышает пороговое значение ε.

И вновь зададимся вопросом о структурных свойствах отношения P при таком представлении.

Отношение Р антирефлексивно и транзитивно, но не удовлетворяет условию отрицательной транзитивности, что легко усматривается из примера на рис. 1.

Рис. 1



Здесь y не предпочтительнее x, и x не предпочтительнее z, но yPz. Поэтому P является частичным порядком, но не слабым порядком. Именно введением порога удается избежать транзитивности отношения безразличия — свойства, лежащего в основании классической парадигмы максимизации полезности, которое, как мы видели, часто нарушается в реальных условиях.

Для того чтобы охарактеризовать свойства предпочтения, введем несколько определений.

Будем говорить, что бинарное отношение P удовлетворяет: а) условию строгой интервальности, б) условию полутранзитивности, если для всех x, y, z, t из А имеет место:

а) из xPy и zPt следует xPt или zPy,

б) из $xPyPz$ следует xPt или tPz соответственно.

Иначе говоря, условие строгой интервальности требует, что если x предпочтительнее, чем y, а z предпочтительнее, чем t, то x должен быть предпочтительнее, чем t, или же z должен быть предпочтительнее, чем y. Аналогично условие полутранзитивности требует, что если x предпочтительнее, чем y, а y предпочтительнее, чем z, то для любого варианта t вариант x должен быть предпочтительнее, чем t, или же t должен быть предпочтительнее, чем z.

Заметим, что в этом определении четыре варианта x, y, z и t не обязательно различны. Если, например, в определении строгой интервальности положить $y = z$, то получим xPt или yPy.

Оказывается, что именно эти типы введенных отношений определяют структурные свойства предпочтений в модели максимизации пороговой полезности. Иначе говоря, в модели (2) при $\varepsilon = \varepsilon(x) \geq 0$ предпочтение P должно быть интервальным порядком, а при $\varepsilon = const > 0$ предпочтение P должно быть полупорядком.

Если $\varepsilon(y) < 0$, то идея порога, которая использовалась нами для объяснения сравнения вариантов в модели (2), теряет смысл. Однако можно объяснить эту модель, используя понятие ошибки измерения. Например, в психофизических экспериментах испытуемому дают в руки два предмета и спрашивают, какой из них тяжелее. Предположим, ответ состоит в том, что объект y тяжелее объекта x, т. е. yPx, хотя верно обратное. Если функция u означает вес предмета, то мы получаем, что $\varepsilon(y) < 0$.

Структурные свойства отношения P в этом случае ограничиваются только условием строгой интервальности.

Класс интервальных порядков был впервые введен Н. Винером (Wiener, 1914) для ответа на вопрос, поставленный Б. Расселом: как получить понятие момента времени (или точки на оси) из понятия временного периода (или интервала на этой оси). Работа Н. Винера была забыта, и в 1956 г. Р.Д. Льюс, пытаясь построить бинарное отношение, для которого отношение неразличимости нетранзитивно, определил полупорядок (Luce, 1956). Современное определение интервального порядка было дано независимо П.С. Фишберном и Б.Г. Миркиным (см.: Fishburn, 1970a,b; Миркин, 1974; Mirkin, 1972, и цитированные там оригинальные работы). Важно отметить, что эти работы мотивировались задачами из психофизики, например, описанием распознавания таких параметров, как яркость, интенсивность звука и т. д.

Отношения бипорядка (которые удовлетворяют только условию строгой интервальности) были введены Ж. Риге (Riguet, 1951) и названы отношениями Ферререса. Такие отношения возникают в задаче разбиения целых чисел. И вновь почти 20 лет спустя эти отношения были переоткрыты в рамках теории шкалирования (так называемые шкалы Гутмана; см.: Suppes et al., 1989). Очень подробное описание свойств бипорядков дано в работе (Doignon et al., 1986).

Исследование численных представлений интервальных порядков и полупорядков в случае бесконечного множества A проведено в целом ряде работ (Bridges, Mehta, 1995; Beja, Gilboa, 1992; Bosi et al., 2001; Bosi, Isler, 1995; Candeal et al., 2002; Manders, 1981).

Свойства этих бинарных отношений и различные приложения с их использованием подробно описаны (см.: Aleskerov, Monjardet, 2002; Pirlot, Vincke, 1997; Roubens, Vincke, 1985).

Пороговая максимизация, в которой порог зависит от обоих сравниваемых вариантов

Пусть, как всегда, функция полезности есть неотрицательная функция u, а пороговая функция задается в виде $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$.

Рассмотрим, когда возникает такая пороговая функция. Пусть в художественном салоне продаются три картины, написанные К. Коровиным (К), М. Врубелем (В) и К. Малевичем (М). Цены картин следующие: К — $ 19800, В — $21400 и М — $ 19300. Если мы строим предпочтение индивидуума на этих картинах по формуле:

$$xPy \text{ в том и только том случае, если } u(x)-u(y)>\varepsilon(x, y), \qquad (3)$$

то отношение P имеет смысл «чем дороже — тем лучше», что, кстати, часто встречается на рынке произведений искусства.

Если $\varepsilon(x, y) = 0$ для всех этих вариантов, то построенное отношение P имеет вид В$\succ$К$\succ$М, где знаком $\succ$ обозначено отношение предпочтения.

Пусть $\varepsilon(x, y)$ имеет вид, показанный в табл. 1.

В пересечении строк и столбцов этой таблицы стоят значения пороговой функции, например: ε(К, В) = ε(В, К) = $2000.

Если воспользоваться этой таблицей, то по формуле (3) получим К$\succ$М, и оба этих варианта К и М неразличимы с В.

И вновь мы задаемся вопросом, каким структурным условиям должно удовлетворять отношение P, чтобы соответствовать сравнению полезностей с такой пороговой функцией, т. е. когда для всех x и y выполняется (3).

М.А. Айзерманом и Ф.Т. Алескеровым получены достаточные условия для того, чтобы отношение P в (3) было транзитивным и отрицательно транзитивным (Aizerman, Aleskerov, 1995). В работе Р.П. Агаева и Ф.Т. Алескерова приведены условия, когда такое отношение P удовлетворяет условию сильной интервальности (Agaev, Aleskerov, 1993). Показано, что достаточные условия транзитивности P, полученные Р.П. Агаевым и Ф.Т. Алескеровым, при некотором дополнительном техническом ограничении

Табл. 1

$\varepsilon(x, y)$	**К**	**В**	**М**
К	0	$2000	$200
В	$2000	0	$2500
М	$200	$2500	0

являются также и необходимыми (Nakamura, 2002).

Можно рассмотреть случай, когда пороговая функция $\varepsilon(x, y)$ аддитивно зависит от порогов отдельных вариантов x и y, т. е. если обозначить через $\delta(x)$ пороговую функцию, соответствующую варианту x, то $\varepsilon(x, y) = \delta(x)+\delta(y)$. Аддитивная пороговая функция была впервые рассмотрена в работах М.А. Айзермана и Ф.Т. Алескерова, а также Р.П. Агаева и Ф.Т. Алескерова (Aizerman, Aleskerov, 1995; Agaev, Aleskerov, 1993).

Рассмотрим теперь случай мультипликативной пороговой функции, т. е. $\varepsilon(x, y) = \delta(x)\delta(y)$. Более того, мы рассмотрим случай, когда функция зависит от функции полезности особым образом. Сначала потребуем, чтобы функция u была строго положительной, т. е. $u(x)>0$ для всех x. Ограничим теперь функцию δ так, что $\delta(x) = \alpha u(x)^{\beta}$, $\alpha>0$, где β — произвольное действительное число. Тогда $\varepsilon(x, y) = \alpha u(x)^{\beta} u(y)^{\beta}$.

Заметим, что, если $\beta>0$, значение δ возрастает вместе со значением u, т. е. чем больше значение u, тем более похожими, неразличимыми становятся варианты для индивидуума с таким порогом. Если же $\beta<0$, то индивидуум более «чувствителен» при сравнении вариантов с более высокими полезностями и меньше различает варианты с малыми полезностями.

Оказывается, что, если $\beta \in \{0, 1\}$ или $\beta = -1$, отношение P, которое представимо в виде (3) для некоторой положительной функции полезности и мультипликативной функции ε, где δ имеет вид $\delta(x) = \alpha u(x)^{\beta}$, $\alpha>0$, $\beta \in [0, 1]$ или $\beta = -1$, является полупорядком. Более того, любой полупорядок представим в виде (3) с мультипликативной функцией ε при $\alpha>0$ и $\beta \in [0, 1]$ или $\beta = -1$.

Этот результат представляется очень важным. Он показывает, что полупорядок представим не только с постоянной пороговой функцией, но и с такой сложной мультипликативной пороговой функцией при $\beta \in [0, 1]$ или $\beta = -1$.

Мультипликативная пороговая функция вида впервые была рассмотрена для случаев $\beta = -1$ и $\beta = 1$ (Aleskerov, Masatlıoğlu, 2003). Для случая $\beta \in [0, 1]$ эта модель была рассмотрена в работе Э. Эзбая в отношении так называемых регулярных полупорядков (Özbay, 2002); исследование общего случая — открытая задача.

Максимизация полезности с пороговой функцией, зависящей от множества вариантов

Как всегда, мы рассматриваем неотрицательную функцию полезности u, а пороговая функция при множествах X, являющихся подмножествами множества A, имеет вид: а) $\varepsilon = \varepsilon(x, y, X)$, б) $\varepsilon = \varepsilon(X)$.

Первый случай наиболее общий: порог зависит как от сравниваемых вариантов, так и от множества, которому принадлежат эти варианты. Такая пороговая функция представляет собой прямое обобщение модели, рассмотренной выше, в которой $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$.

Пороговая функция вида $\varepsilon = \varepsilon(X)$ обобщает классическую модель с постоянным порогом $\varepsilon = \text{const}$. В этом последнем случае пороговая функция постоянна на каждом X, но может меняться при изменении допустимого множества.

Другие возможные виды пороговых функций $\varepsilon = \varepsilon(y, X)$ и $\varepsilon = \varepsilon(x, X)$ сводятся к случаям а) и б) (Aleskerov, Monjardet, 2002).

Поскольку пороговая функция зависит от множества, естественно рассматривать функцию выбора, рационализируемую функцией полезности и пороговой функцией, т. е. функцию выбора, которая выбирает варианты, максимальные по значению функции полезности с учетом порога ε:

$C(X)$ = {y из X такие, что не существует x из X такого, что $u(x)-u(y)>\varepsilon$}, *(4)*

где $\varepsilon = \varepsilon(x, y, X)$ и $\varepsilon = \varepsilon(X)$.

Рассмотрим некоторые свойства этих моделей выбора.

Будем говорить, что функция выбора C удовлетворяет условию Включающей Максимизации, если для некоторой функции u, всех x, y из X, если нет такого x, что $u(x)>u(y)$, то y включается в $C(X)$. Иначе говоря, вариант с максимальным значением функции полезности присутствует в выборе из X. При этом допускается, например, что второй и третий по значению полезности варианты в выбор не включаются, а четвертый включается и т. д.

Для того чтобы избежать таких вырожденных случаев нерационального поведения, вводится новое условие. Будем говорить, что функция выбора C удовлетворяет условию Сильной Включающей Максимизации, если для некоторой функции u, всех x и y, z из A имеет место:

а) если нет такого x, что $u(x)>u(y)$, то y включается в выбор $C(X)$;

б) если x включается в выбор $C(X)$ и $u(z) \geq u(x)$, то z включается в выбор $C(X)$.

Другими словами, прежде всего вариант с максимальной полезностью включается в выбор; если некоторый вариант x включается в выбор из X, то все варианты с полезностью большей, чем x, также включаются в выбор.

В 1950-е гг. Г. Саймон выступил с резкой критикой парадигмы рационального выбора, т. е. выбора, рационализируемого функцией полезности (Simon, 1956). Им была предложена другая парадигма выбора, согласно которой у индивидуума есть некоторый уровень удовлетворенности, так что все варианты с полезностью не ниже этого уровня приемлемы, а варианты с полезностью ниже этого уровня представляются индивидууму неприемлемыми.

Именно эта интерпретация выбора отражена в условии Сильной Включающей Максимизации.

Формально эта парадигма выбора может быть записана следующим образом: на A определена функция полезности u, на подмножествах A — пороговая функция V, определяющая уровень удовлетворенности индивидуума на этом подмножестве; правило выбора, которое можно назвать правилом надпорогового выбора, имеет вид:

$C(X)$={$y \in X$ такие, что $u(y)>V(X)$},

т. е. выбираются варианты, имеющие значение полезности выше некоторого порога.

Функция V может иметь, например, смысл среднего значения в множестве X, и тогда в выбор $C(X)$ входят варианты, значение полезности которых выше средней на X.

Оказывается, что функция выбора является функцией надпорогового выбора, если и только если она рационализируема функцией полезности и пороговой функцией вида $\varepsilon = \varepsilon(X)$.

Надо сказать, что экспериментальная верификация модели надпорогового выбора существенно проще, чем эквивалентной модели с порогом вида $\varepsilon = \varepsilon(X)$ (см. следующий раздел).

Если для моделей, описывающих предпочтения индивидуума, структурные свойства ограничивали вид этих предпочтений, то в случае функций выбора эти ограничения имеют вид условий Включающей и Сильной Включающей Максимизации.

Установим теперь связь между функциями выбора, рационализируемыми функциями полезности с порогом вида $\varepsilon(x, y, X)$ и $\varepsilon(X)$, и функциями выбора, которые удовлетворяют этим структурным ограничениям.

Оказывается, что функция выбора удовлетворяет условию Включающей Максимизации, если и только если она рационализируема функцией полезности и неотрицательной пороговой функцией вида $\varepsilon = \varepsilon(x, y, X)$. Функция выбора удовлетворяет условию Сильной Включающей Максимизации, если и только если она рационализируема функцией полезности и неотрицательной пороговой функцией вида $\varepsilon = \varepsilon(X)$.

Результаты исследования моделей с пороговой полезностью, зависящей от множества альтернатив, были опубликованы в 1987 г. (Aleskerov, Vol'skiy, 1987). Характеристические условия, которым удовлетворяет соответствующая функция выбора при различных видах пороговой функции ε, приведены в 1995 г. (Aizerman, Aleskerov, 1995). Свойства Включающей Максимизации и Сильной Включающей Максимизации были введены Ф.Т. Алескеровым и Т. Шварцем в неопубликованной работе 1992 г. (см. также: Deb, 1983). Условия рационализируемости предпочтения также исследовались в ряде работ (Агаев, Алескеров, 1993; Алескеров, 2002; 2003; Agaev, Aleskerov, 1993; Aleskerov, 2002; Aleskerov, Monjardet, 2002).

Об экспериментальной верификации построенных моделей

Классическая модель с $\varepsilon = const$ была проверена в значительном количестве экспериментов. Описанные выше более сложные модели еще ждут своего экспериментального подтверждения. Как уже подчеркивалось, эти модели сами по себе не являются истинными или ложными описаниями процессов выбора у человека, все зависит от ситуации, осуществления этого выбора. В некоторых ситуациях модель с константным порогом является адекватным описанием поведения человека. Чтобы показать продуктивность модели с изменяемым порогом, необходимо найти и экспериментально смоделировать ситуации, где эта модель оказывается более адекватной, чем модель с $\varepsilon = const$. Ниже предлагается идея такого эксперимента.

Модель с функцией порога, зависящей от значения полезности

Во время работы в Турции в 1995–2001 гг. автору приходилось наблюдать следующую ситуацию. В Стамбуле часто водители такси, если на счетчике высвечивалась цифра 1.1 млн. лир, соглашались получить только 1 млн. лир и не менять предлагаемые банкноты достоинством в 1 млн. и 500 тыс. лир. Другими словами, 1.1 млн. лир и 1 млн. оказываются для них неразличимыми, если им приходится затратить силы и время, чтобы разменять денежные купюры. Но по-видимому, порог неразличимости не будет для таксиста константным, а будет зависеть от ряда параметров. Например, если время и силы, затрачиваемые на размен купюр уменьшить, то, вероятно, сократится и порог, т. е. таксист предпочтет не терять деньги, а произвести размен. Возможно также, отказ от части вознаграждения будет зависеть от того, сколько времени таксист потратил на работу с данным клиентом и сколько денег он заработал до этого.

По мотивам этой ситуации можно построить психологический эксперимент. Пусть испытуемый получает условный заказ i, который выполняется за время t_i. Оплата заказа пропорциональна времени и равна p_i. По окончании времени заказа условно выплачивается сумма p_i, но крупными банкнотами. Испытуемый не имеет точной сдачи. Но он может согласиться не брать часть денег или же потратить время и разменять банкноты. Это требует некоторого времени. Тогда он может потерять очередной заказ и соответствующее вознаграждение.

Гипотеза заключается в том, что модель с функцией порога, зависящей от значения полезности, более точно опишет поведение испытуемого в этом эксперименте, чем модель с постоянным порогом.

Модель надпорогового выбора

Модель надпорогового выбора также не находила еще экспериментального применения. Как было отмечено выше, эта модель, восходящая к работам Г. Саймона, предполагает, что субъект выбирает любую альтернативу, если ее полезность превосходит некоторый порог. Примерная схема ситуации, где можно ожидать применение субъектом надпорогового выбора, заключается в следующем.

Индивидууму предъявляется множество альтернатив с оценками полезности каждой альтернативы. Сообщается, что указанные оценки неточны, но можно, затратив некоторое время, их уточнить. Задача испытуемого — указать множество приемлемых для него вариантов.

Уточняя оценки, индивидуум получает возможность выбрать варианты с большей полезностью, однако на это затрачивается время, количество ответов уменьшается, что снижает выигрыш. Гипотеза заключается в том, что поведение испытуемых осуществляется на основании надпорогового выбора. Для проверки гипотезы осуществляется проверка согласованности ответов в терминах свойства Сильной Включающей Максимизации. Кроме того, в эксперименте можно варьировать характер распределения полезности предлагаемых альтернатив. В разных экспериментальных условиях оценки альтернатив можно сделать:

– равномерно распределенными,

– со сгущениями в некоторых точках,

– нормально распределенными.

Вопрос состоит в следующем: при каких распределениях значений полезности альтернатив будет получена устойчивая точка, определяющая уровень удовлетворенности индивидуума.

Заключение

Завершим обзор изложением двух открытых проблем.

Нами были рассмотрены модели, в которых не учитывалась интенсивность предпочтений вариантов. Такие модели возникают, например, в психологических экспериментах, когда, помимо указания пары xPy, этой паре приписывается число, обозначающее долю ответов $\lambda(x, y)$, в которых индивидуум дал правильный ответ. Отношения такого типа называются взвешенными, и известны «взвешенные» обобщения слабых порядков, интервальных порядков, полупорядков и бипорядков (см., например: Fishburn, 1997; Krantz, 1967). Было бы интересно обобщить в этом направлении другие классы бинарных отношений, возникающие при контекстно-зависимом сравнении альтернатив.

Вторая открытая проблема — это обобщение всех моделей, рассмотренных выше, на тот случай, когда варианты оцениваются не одной функцией полезности, а несколькими. Такое обобщение немедленно приводит нас к проблемам многокритериального выбора и агрегирования. В этих направлениях уже были сделаны самые простые обобщения (Алескеров и др., 1983; Aleskerov, 1984; Bouyssou and Pirlot, 2004).

Благодарности

Я очень благодарен А.Н. Поддьякову за приглашение написать статью в этот номер журнала. Воспользовавшись этим приглашением, я решил написать обзор существующего состояния проблемы, которая была достаточно широко представлена в зарубежной экономической и математической литературе и у нас в кибернетических журналах, но не получила освещения в психологических журналах, особенно в части, касающейся контекстно-зависимого выбора. Кроме того, не будучи экспериментатором, я взял также на себя смелость написать короткий раздел об экспериментальной верификации двух разработанных моделей. Хочу выразить признательность А.В. Белянину за возможность обсуждения с ним этого раздела и его ценные замечания.

Особую благодарность я хотел бы выразить Д.В. Ушакову за полезные предложения по редактированию текста статьи.

Литература

Агаев Р., Алескеров Ф. Обобщенные механизмы интервального выбора и порождаемые ими функции // Автоматика и телемеханика. 1993. № 4. С. 662–671.

Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов (основы теории). М.: Наука, 1990.

Алескеров Ф.Т. Простые и простейшие полупорядки // Доклады РАН. 2002. Т. 387. С. 175–177.

Алескеров Ф.Т. Пороговая полезность, выбор и бинарные отношения // Автоматика и телемеханика. 2003. № 3. С. 8–27.

Алескеров Ф.Т., Бауман Е.В., Вольский В.И. Методы обработки интервальных экспертных оценок // Автоматика и телемеханика. 1984. № 3. С. 384–389.

Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.

Agaev R., Aleskerov F. Interval choice: classic and general cases // Mathematical Social Sciences. 1993. 26 (3). 249–272.

Aizerman M., Aleskerov F. Theory of Choice. North-Holland, Elsevier Science B.V. Amsterdam, 1995.

Aleskerov F. Multicriterial interval choice models // Information Sciences. 1994. 80 (1 and 2). 25–41.

Aleskerov F. Binary representation of choice rationalizable by a utility function and an additive non-negative error function // Mathematical Social Sciences. 2002. 43 (2). 177–185.

Aleskerov F., Masatlıoğlu Y. Utility representation via additive or multiplicative error functions // Discrete Applied Mathematics. 2003. 127 (2). 181–197.

Aleskerov F., Monjardet B. Utility Maximization, Choice and Preference. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

Aleskerov F., Vol'skiy V. Choice of the best variants on binary relations and the extremizational choice // Preprints of 10th World Congress on Automatic Control. 1987. Vol. 5. FRG, Munich.

Armstrong W. The determinateness of the utility function // Economic Journal. 1939. 49. 453–467.

Armstrong W. A note on the theory of consumer's behavior // Oxford Economics Papers, N.S. 1950. 2. 119–122.

Arrow K. Rational choice functions and orderings // Economica. 1959. 26. 121–127.

Aumann R. Rationality and bounded rationality. Nancy L. Schwartz Memorial Lecture, J.L. Kellogg School of Management, Northwestern University, 1986.

Bej A., Gilboa I. Numerical representations of imperfectly ordered preferences (A unified geometric exposition) // Journal of Mathematical Psychology. 1992. 36. 426–449.

Bentham J. An Introduction to the Principles of Moral and Legislation. London: Athlone Press, 1970.

Birkhoff G. Lattice Theory, American Mathematical Society, Providence. R.I., 1948.

Blaug M. Economic Theory in Retrospect. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

Bosi B., Candeal J.C., Induráin E., Oloriz E., Zudaire M. Numerical representations of interval orders // Order. 2001. 18. 171–190.

Bosi G., Isle R. Representing preferences with nontransitive indifference by a single real-valued function // Journal of Mathematical Economic. 1995. 24. 621–631.

Bouyssou D., Pirlot M. Preferences for multiattributed alternatives: Traces, dominance, and numerical representations // Journal of Mathematical Psychology. 2004. 48 (3). 167–185.

Bridges D.S., Mehta G.B. Representation of Preference Orderings. Berlin: Springer-Verlag, 1995.

Candeal J.C., Induráin E., Zudaire M. Numerical representability of semiorders // Mathematical Social Sciences. 2002. 43 (1). 61–77.

Cantor G. Beitrage zur begrüngüng der transfiniten mengenlehre // Mathematische Annalen. 1895. 46. 486–512.

Chipman J.S. The foundations of utility // Econometrica. 1960. 28. 193–224.

Deb R. Binariness and rational choice // Mathematical Social Sciences. 1983. 5 (1). 97–105.

Doignon J.-P. Generalization of interval orders // E. Degreef, J. Van Buggenhaut (eds.). Trends in Mathematical Psychology. Elsevier, 1984. 209–217.

Doignon J.-P., Ducamp A., Falmagne J.-C. On realizable biorders and the biorder dimension of a relation // Journal of Mathematical Psychology. 1984. 28. 73–109.

Doignon J.-P., Monjardet B., Roubens M., Vincke Ph. Biorder families, valued relations and preference modeling // Journal of Mathematical Psychology. 1986. 30. 435–480.

Ducamp A., Falmagne J.C. Composite measurement // Journal of Mathematical Psychology. 1969. 6 (3). 359–90.

Falmagne J.C. Elements of Psychophysical Theory. Oxford: Oxford University Press, 1985.

Fechne G.T. Elemente der Psychophysik. Leipzig: Breitkopf und Hartel, 1860.

Fishburn P.C. Utility Theory for Decision Making.. New York: Wiley, 1970.

Fishburn P.C. Intransitive Indifference with Unequal Indifference Intervals // Journal of Mathematical Psychology. 1970. 7. 144–149.

Fishburn P.C. Interval representations for interval orders and semiorders // Journal of Mathematical Psychology. 1973. 10. 91–105.

Fishburn P.C. Generalizations of semiorders: a review note // Journal of Mathematical Psychology. 1997. 41. 357–366.

Fishburn P.C., Monjardet B. Norbert Wiener on the theory of measurement (1914, 1915, 1921) // Journal of Mathematical Psychology. 1992. 35 (2). 865–885.

Georgescu-Roegen N. The pure theory of consumer's behavior // Quaterly Journal of Economics. 1936. 50. 545–593.

Houthakker H.S. Revealed preference and the utility function // Economica. 1950. 17. 159–174.

Kahneman D., Tversky A. Choice, Values and Frames. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

Krant D.H. Extensive measurement in semiorders // Philosophy of Science. 1967. 34. 348–362.

Krantz D.H., Luce R.D., Suppes P., Tversky A. Foundations of measurement, Additive and polynomial representations, 1. New York: Academic Press, 1971.

Krep D. Notes on the Theory of Choice. Vestview Press, Boulder and London, 1988.

Luce R.D. Semi-orders and a theory of utility discrimination // Econometrica. 1956. 24 (2). 178–191.

Manders K.L On JND representations of semiorders // Journal of Mathematical Psychology. 1981. 24. 224–248.

Mirkin B.G. Description of some relations on the set of real-line intervals // Journal of Mathematical Psychology. 1972. 9. 243–252.

Monjardet B. Intervals, intervals... // Order. 1988. 5. 211–219.

Nakamura Y. Semimetric thresholds for finite posets // Mathematical Social Sciences. 2002. 44. 37–43.

Özbay E.Y. Numerical Representation of Binary Relations with Multiplicative Error Function: A General Case // A. Tangian, J. Gruber (eds.). Constructing and Applying Objective Functions. Berlin: Springer, 2002. P. 75–88.

Pareto V. Cours d'Economie Politique. Lausanne: Rouge, 1889.

Pirlot M., Vincke Ph. Semiorders: Properties, Representations, Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

Poincaré H. La Valeur de la Science. Paris: Flammarion, 1903.

Richter M.K. Revealed preference theory // Econometrica. 1966. 34. 635–645.

Richter M.K. Rational choice // J.S. Chipman, L. Hurwicz, M.K. Richter, H.F. Sonnenshein (eds.). Preference, Utility and Demand. New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1971.

Riguet J. Les relations de Ferrers C.R. // Académie des Sciences. 1951. 232. 1729–1730.

Roberts F.S. Measurement theory // Encyclopedia of Mathematics and its Applications. London: Addison-Wesley, 1979. Vol. 7.

Roubens M., Vincke Ph. Preference Modelling, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Berlin: Springer, 1985.

Samuelson P. A note on the pure theory of consumers behavior // Economica. 1938. 5. 61–71, 353–354.

Schröder E. Vorlesungen über die Algebra der Logik. Leipzig, 1890–1895. Vol. 3.

Schwartz T. Rationality and the myth of maximum // Nôus. 1972. 6. 97–117.

Scott D., Suppes P. Foundational aspects of theories of measurement // Journal of Symbolic Logic. 1958. 23. 113–128.

Sen A. Rational behavior // J. Eatwell, M. Milgate, P. Newman (eds.).The New Palgrave: A Dictionary of Economics. London: Macmillan, 1987. 4. 68–76.

Sen A. Internal consistency of choice // Econometrica. 1993. 61 (3). 495–521.

Sen A. The formulation of rational choice // American Economic Review. 1994. 84. 385–390.

Sen A. Maximization and the act of choice // Econometrica. 1997. 65 (4). 745–779.

Simon H. Models of Bounded Rationality // Collected papers. Cambridge: The MIT Press, MA, 1982.

Subiza B. Numerical representation of acyclic preferences // Journal of Mathematical Psychology. 1994. 38. 467–476.

Suppes P., Krantz D.H., Luce R.D., Tversky A. Foundations of measurement. Geometrical, threshold, and probabilistic representations. New York: Academic Press, 1989. Vol. 2.

Tversky A. Intransitivity of preferences // Psychological Review. 1969. 76. 31–48.

Wiener N. A contribution to the theory of relative position // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1914. 17. 441–449.