Психология. Журнал Высшей школы экономики.
2011. Т. 8, № 2. С. 138–147.

НАСКОЛЬКО УСТОЙЧИВА ПСИХОЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ТЕКСТОВОЙ ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ?

В.Ф. СПИРИДОНОВ

Резюме

В статье обсуждается наличие инвариантов в структуре репрезентации мыслительной задачи решателем. Экспериментальное исследование, в ходе которого школьники решали одни и те же текстовые алгебраические задачи с систематически варьируемыми требованиями, показало, что испытуемые независимо от их уровня компетентности практически не обращали внимания на это обстоятельство. Таким образом, выявленные на материале составления алгебраических уравнений инварианты свидетельствуют в пользу существования явления, аналогичного феномену узуса, т.е. общепринятого у носителей данного языка употребления языковой единицы.

Ключевые слова: *психологическая структура задачи, инварианты репрезентации задачи, узус.*

Проблема наличия инвариантов в структуре репрезентации мыслительной задачи имеет первостепенное теоретическое значение. Фиксация в контролируемых условиях способов решения или ходов рассуждения, используемых разными испытуемыми применительно к одной и той же задаче, или сходных приемов по отношению к различным, но близким задачам позволила бы получить серьезные аргументы в пользу существования устойчивых и повторяемых конструкций в процессе решения[1]. Представляется, что это был бы заметный шаг к изучению

[1] Понятно, что постоянное применение одних и тех же приемов решения задач, которое обеспечивается любым систематическим обучением (обычным школьным или методами

практически мифологической в настоящее время *психологической* структуры мыслительной задачи. Несмотря на наличие вполне устойчивой традиции определения и описания данного явления (Балл, 1990; Петухов, 1987; Рубинштейн, 1958; Фридман, 2001), в плане экспериментального анализа речь пока может идти лишь об отдельных (и чуть ли не случайных) исследовательских удачах.

Основное затруднение заключается в том, что возникновение психологической структуры задачи — т. е. верной или ошибочной репрезентации решателем каких-то ее условий, значимых для решения, — в значительной степени стихийный процесс. В отличие от «поверхностных» характеристик задачи (количества условий, их структурированности в начале решения, сложности требуемых для решения правил, новизны или контринтуитивности формулировок и др.), варьирование которых в ходе эксперимента технически весьма несложно и напрямую определяет трудность задачи для решения, «глубинные» структуры недоступны прямому воздействию извне. Таким образом, в эмпирических исследованиях остается лишь надеяться на появление закономерных трансформаций психологической структуры, изменяя по тем или иным правилам условия и требование задачи.

Именно так и устроена сложившаяся исследовательская практика. Скажем, варьируя ключевые для нахождения решения элементы условий задач одного типа (на перемещение спичек), Г. Кноблих, С. Олссон и Г. Рэни (Knoblich, Ohlsson, Raney, 2001) продемонстрировали изменение количества фиксаций глаз на этих элементах на определенных этапах поиска ответа. Это обстоятельство было интерпретировано как закономерное изменение репрезентации проблемной ситуации, о чем и свидетельствуют соответствующие сдвиги внимания. В работе К. Котовского, Дж.Р. Хейса и Г.А. Саймона (Kotovsky, Hayes, Simon, 1985) систематически изучались так называемые изоморфные задачи — сходные по своей структуре, но сформированные из разных по содержанию условий (например, известной задаче о Ханойской башне с тремя дисками изоморфны задачи на изменение объема трех шаров или перемещение трех акробатов и др.). Особый интерес вызывают различия времени правильного решения таких задач, которые могут достигать 15 и более раз. Серия экспериментов показала существенную роль, которую играют некоторые составные части и параметры репрезентации в успешности нахождения правильного ответа. Так, сходство правил, определяющих путь к решению, и их сопоставимость с бытовым знанием облегчают овладение такими правилами и их перенос на последующие задачи. Наличие хорошего внешнего представления

целенаправленного формирования), не представляет особого интереса, поскольку связь этих повторов с психологической структурой задачи остается неясной: названные традиции обучения практически игнорируют особенности индивидуальных репрезентаций, подменяя их нормативными.

(фигурок чудовищ) делает задачи значительно более легкими; кроме того, было показано, что проще отслеживать изменения, происходящие в пространстве, нежели наблюдать за модификациями непространственных свойств объектов. В исследовании В.Ф. Спиридонова (Спиридонов, 1994; Spiridonov, 1997) было обнаружено, что в ходе решения задач с неполными условиями (загадок-ситуаций — «да-неток») испытуемые закономерно начинают использовать новые мыслительные средства — эвристики, которые и позволяют справиться с неполнотой задачи, ранжируя уже известные условия по значимости и направляя поиск еще неизвестных условий. Таким образом, эвристики могут быть интерпретированы как средства работы с репрезентацией задачи. Список подобным образом организованных исследований может быть легко продолжен.

В настоящей работе мы испробовали до некоторой степени противоположный ход поиска. Варьируя значимые параметры (формулировку требования) решаемых текстовых задач по алгебре, мы хотели оценить восприимчивость решателей к этому воздействию. Если в случае разных формулировок задачи они учтут это обстоятельство при составлении уравнений (т.е. изменят их соответствующим образом), мы обнаружим гибкость мышления и отсутствие интересующих нас явлений. Напротив, повторяемость используемых уравнений будет свидетельством в пользу существования устойчивых инвариантов в решении — ригидных частей репрезентации.

Гипотезы

1) Испытуемые составят уравнения, учитывая содержание требования алгебраической текстовой задачи, т.е. применительно к разным вариантам предъявленных требований будут составлены различные уравнения.

2) Более квалифицированные испытуемые (учащиеся московской математической школы) будут учитывать содержание требования чаще, чем менее квалифицированные решатели.

Методика и процедура

Выборка. Ученики 7-х, 8-х и 9-х классов нескольких средних общеобразовательных школ, расположенных в Алтайском крае, Московской области и городах Москва и Барнаул[2], и одной московской математической школы; всего — 397 человек. Испытуемые, не решившие ни одной задачи, были исключены из обработки. Таким образом, итоговая выборка составила 180 человек 13–15 лет обоего пола.

Задачи и процедура. Испытуемым фронтально предлагались для письменного решения четыре текстовые алгебраических задачи, взятые из сборников заданий по алгебре для 7-го и 8-го классов средней школы. Испытуемых просили решать задачи

[2] Мы выражаем глубокую благодарность Г.С. Авдеевой, которая провела эмпирическую часть исследования в школах Алтайского края и г. Барнаул.

в порядке предъявления и не переходить к следующей, не попробовав решить предыдущую. Задачи были подобраны по своим структурным особенностям: их условия включали числовые данные (например, скорость равна 38 км) и одну, две или три функциональные связки[3]. Четвертая проблемная ситуация состояла исключительно из функциональных связок и относилась к так называемым вырожденным линейным задачам (см. таблицу 1). Как показывают результаты наших предыдущих исследований, названные структурные особенности алгебраических задач выступают устойчивыми предикторами их трудности для решения (Спиридонов, 2006).

Для каждой задачи были составлены по 3 варианта требования: 1) вопрос об одном из неизвестных параметров задачи (например, о расстоянии между населенными пунктами); 2) вопрос о другом неизвестном параметре (например, о времени, которое потратит на весь путь один из движущихся объектов); 3) вопрос о преобразовании параметра, о котором речь шла в первом требовании (например, об одной трети расстояния между населенными пунктами). Требования были составлены таким образом, чтобы испытуемые, составив корректное уравнение, могли непосредственно вычислить ответ на вопрос задачи (см. таблицу 2). Таким способом мы можем определить, учтут ли испытуемые то или иное требование: причем если 3-й вариант требовал некоторых навыков работы с уравнением, то отличия 1-го требования от 2-го являлись более очевидными: за x надо было просто принять различные явления, представленные в условии задачи. В случае составления уравнения, не соответствующего требованию, испытуемые значительно удлиняли себе путь к ответу: после нахождения x им необходимо было еще выполнить дополнительные вычисления. Порядок предъявления задач, а также их требования систематически варьировались. Набор задач во всех 12 использованных вариантах был идентичен (состав трех вариантов приведен в таблице 1).

Результаты и обсуждение

Правильным решением задачи мы считали не получение испытуемым верного численного ответа, а корректно составленное уравнение или их систему. На основании показателей успешности решения мы разделили всю выборку на 3 подгруппы. В первую — среднюю по успешности — были включены ученики из нескольких школ, решившие от одной до четырех задач ($n = 86$), во вторую (самую успешную) — ученики московской математической школы ($n = 57$), а в третью — ученики из самых слабых классов, решившие всего одну задачу, причем только из тех классов, где никто из их одноклассников также не решил больше одной задачи ($n = 37$). Успешность решения задач в трех названных подгруппах значимо различалась (см.

[3] Связанная пара величин, которая не определена количественно и не может быть непосредственно вычислена исходя из условия задачи.

Таблица 1

Алгебраические текстовые задачи, использованные в экспериментальном исследовании (разными типами курсива в задачах выделены *одна*, *две* и *три* функциональные связки в условии). Варьируемые требования выделены жирным шрифтом

Вариант 1			
1. Два грузовика выехали из пункта А в пункт В. Скорость одной машины 38 км/час, а другой 57 км/час. *Первая вышла со станции А на 9 часов раньше второй*, но обе машины одновременно достигли пункта В. **Чему равно расстояние между пунктами А и В?**	2. Турист, находящийся в лагере, должен успеть встретить поезд на станции. *Если он поедет на велосипеде со скоростью 15 км/ч, то опоздает на 30 мин*, а *если поедет на автобусе со скоростью 40 км/ч, то приедет на 2 ч раньше*. **Чему равно расстояние от лагеря до станции?**	3. В одном овощехранилище 210 т картофеля, в другом — 180 т. *В первое подвозили по 90 т картофеля в день, во второе — по 120 т.* **Через сколько дней в первом хранилище станет в 1.2 раза меньше картофеля, чем во втором?**	4. *У мальчика столько сестер, сколько братьев*, а *у его родной сестры вдвое меньше сестер, чем братьев*. **Сколько всего детей в этой семье?**
Вариант 2			
1. Турист, находящийся в лагере, должен успеть встретить поезд на станции. *Если он поедет на велосипеде со скоростью 15 км/ч, то опоздает на 30 мин*, а *если поедет на автобусе со скоростью 40 км/ч, то приедет на 2 ч раньше*. **Сколько времени потратит турист на весь путь, если поедет на автобусе?**	2. В одном овощехранилище 210 т картофеля, в другом — 180 т. *В первое подвозили по 90 т картофеля в день, во второе — по 120 т.* **Сколько тонн картофеля будет во втором овощехранилище, *когда в нем будет в 1.2 раза больше картофеля, чем в первом?***	3. *У мальчика столько сестер, сколько братьев*, а *у его родной сестры вдвое меньше сестер, чем братьев*. **Сколько братьев в этой семье?**	4. Два грузовика выехали из пункта А в пункт В. Скорость одной машины 38 км/час, а другой 57 км/час. *Первая вышла со станции А на 9 часов раньше второй*, но обе машины одновременно достигли пункта В. **Какое время затратила на весь путь вторая машина?**
Вариант 3			
1. *У мальчика столько сестер, сколько братьев*, а *у его родной сестры вдвое меньше сестер, чем братьев*. **Каково удвоенное количество детей в этой семье?**	2. Два грузовика выехали из пункта А в пункт В. Скорость одной машины 38 км/час, а другой 57 км/час. *Первая вышла со станции А на 9 часов раньше второй*, но обе машины одновременно достигли пункта В. **Чему равна половина расстояния между пунктами А и В?**	3. Турист, находящийся в лагере, должен успеть встретить поезд на станции. *Если он поедет на велосипеде со скоростью 15 км/ч, то опоздает на 30 мин*, а *если поедет на автобусе со скоростью 40 км/ч, то приедет на 2 ч раньше*. **Чему равна одна треть расстояния от лагеря до станции?**	4. В одном овощехранилище 210 т картофеля, в другом — 180 т. *В первое подвозили по 90 т картофеля в день, во второе — по 120 т*. **Какова половина срока (половина дней), когда *в первом хранилище станет в 1.2 раза меньше картофеля, чем во втором?***

Таблица 2

Уравнения, составленные в соответствии с требованием задачи

Задача про два грузовика. Чему равно расстояние между пунктами А и В?	Какое время затратила на весь путь вторая машина?	Чему равна половина расстояния между пунктами А и В?
x/38 = (x/57) + 9	**57x = 38(x+9)**	**x/38 = (x/57) + 4.5**
Задача про туриста. Чему равно расстояние от лагеря до станции?	Сколько времени потратит турист на весь путь, если поедет на автобусе?	Чему равна одна треть расстояния от лагеря до станции?
(x/15) – 1/2 = (x/40) + 2	**15(x + 2,5) = 40x**	**(x/15) – 1/6 = (x/40) + 2/3**
Задача про картофель. Через сколько дней в первом хранилище станет в 1.2 раза меньше картофеля, чем во втором?	Сколько тонн картофеля будет во втором овощехранилище, когда в нем будет в 1.2 раза больше картофеля, чем в первом?	Какова половина срока (половина дней), когда в первом хранилище станет в 1.2 раза меньше картофеля, чем во втором?
(210 + 90x)*1.2 = 180 + 120x	**(x/1.2 – 210)/(x – 180) = 90/120**	**(105 + 90x)*1.2 = 90 + 120x**
Задача про детей. Сколько всего детей в этой семье?	Сколько братьев в этой семье?	Каково удвоенное количество детей в этой семье?
x + x + 1 = = x + 1 + (x + 1)/2 + 1*	**(x/2) + 1 = x-1**	**2(x + x + 1)= = 2x + 2+ 2(x + 1)/2 + 2***

* В задаче № 4 («про детей») составить уравнение, в котором за *x* будет принято общее количество детей в семье (или их удвоенное количество), невозможно. Поэтому мы засчитывали как учитывающие требование те уравнения, где их левая и правая части выражали это искомое общее количество. Таким образом, это уравнение несет существенную долю условности.

таблицу 3): критерий Манна–Уитни; подгруппа 2 > подгруппа 1 $p = 0.004$; $2 > 3$ $p = 0.001$; $1 > 3$ $p = 0.001$). Так были сформированы группы решателей, различающихся по степени компетентности в решении текстовых алгебраических задач.

Для всех полученных правильных решений мы, опираясь на таблицу 2, подсчитали количество случаев, когда испытуемые учли содержание требования задачи, составив соответствующее уравнение.

Затем мы сравнили между собой частоту учета требования испытуемыми применительно к каждой из использованных задач. Дисперсионный анализ показал, что тип задачи ($F(3, 143) = 3.256$, $p = 0.024$, $\eta^2_p = 0.069$) и принадлежность к той или иной подгруппе ($F(2, 143) = 5.379$, $p = 0.006$, $\eta^2_p = 0.075$) оказывают значимое влияние на частоту учета требования (см. рисунок 1); взаимодействие факторов статистически незначимо. Чтобы уточнить этот результат, мы отбросили подгруппу 3 (в связи с тем, что ее представители в основном справились лишь с задачей № 1) и:

а) Повторили дисперсионный анализ. Он показал отсутствие значимых различий между подгруппами 1 и 2 по обоим обсуждаемым факторам. Таким образом, структура

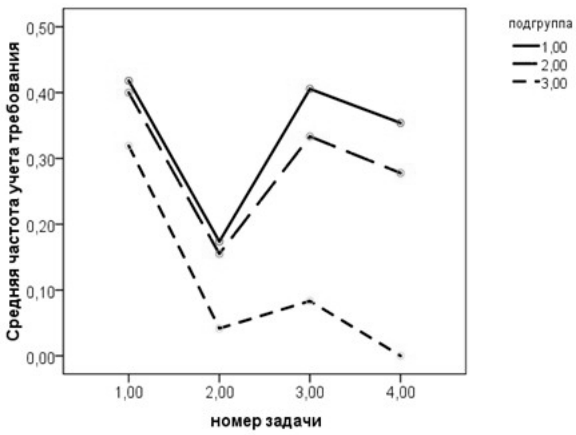
Таблица 3

Средние и стандартные отклонения показателей успешности решения алгебраических задач для трех подгрупп испытуемых

	Среднее	**Стандартное отклонение**
Подгруппа 1	63%	23%
Подгруппа 2	78%	19%
Подгруппа 3	26%	34%

Рисунок 1

Зависимость частоты учета требования от типа решаемой задачи и компетентности испытуемых

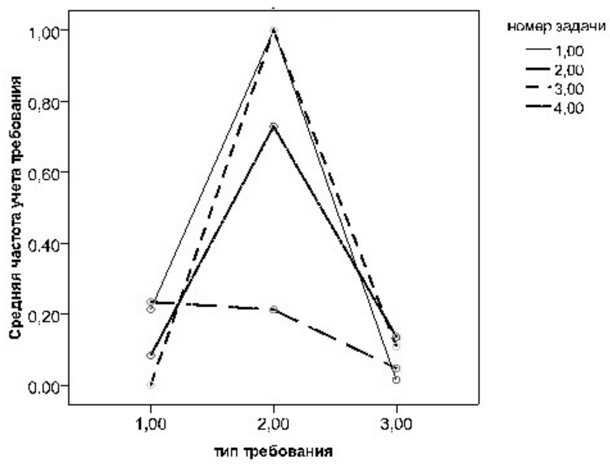


полученных результатов противоречит гипотезе 2, поскольку значимый прирост в успешности решения задач не приводит к значимому росту учета их требований. Начиная с некоторого «среднего» уровня компетентности испытуемые в одинаковой степени учитывают/не учитывают содержание требования задачи при составлении уравнения.

б) Сравнили между собой частоту учета трех требований к задачам (см. выше в описании методики) испытуемыми подгрупп 1 и 2. С этой целью был проведен еще один дисперсионный анализ (см. рисунок 2). Он показал, что тип требования ($F(2, 95) = 147.953$, $p < 0.001$, $\eta^2_p = 0.779$) и тип задачи ($F(3, 95) = 9.556$, $p < 0.001$, $\eta^2_p = 0.254$) значимо влияют на учет требования испытуемыми. Взаимодействие этих факторов также оказалось значимым ($F(6, 95) = 16.459$, $p < 0.001$, $\eta^2_p = 0.54$). Дополнительная проверка с помощью апостериорных тестов продемонстрировала, что в случае задачи № 2 частота учета требования значимо ниже (множественные сравнения по методу В Тьюки $\alpha = 0.05$), а кроме того, что частота учета требования значимо выше при

Рисунок 2

Частота учета требования задачи в зависимости от ее типа и типа требования



решении задач со вторым требованием (метод В Тьюки $\alpha = 0.05$).

Этот результат не случаен. При формулировании требований к задачам мы исходили из того, что одному из них — второму — должно соответствовать высокочастотное уравнение, т.е. уравнение, которое входит в набор парадигматических для данной задачи уравнений и которое наиболее часто можно обнаружить в протоколах испытуемых (Спиридонов, 2008, 2009). Однако для задачи № 2 это было не так: наиболее частотное для нее уравнение — $15(x + 0.5) = 40(x - 2)$ — не соответствовало ни одному из предложенных вариантов требования. Таким образом, составляя именно это уравнение, испытуемые не учитывали ни один из предложенных вариантов требования, что и привело к описанной структуре результатов.

Все это вместе взятое означает, что варьирование требования алгебраической задачи не оказывает значимого влияния на составление уравнения: испытуемые не ориентируются на содержание требования в ходе ее решения, что противоречит гипотезе 1.

в) Вернули результаты испытуемых подгруппы 3 и провели сравнительный анализ частоты учета требования для решений задачи № 1 (поскольку именно с ней чаще всего успешно справлялись эти испытуемые, что позволило провести обоснованное сравнение с другими подгруппами) (см. таблицу 4). Несмотря на то что учащиеся математической школы значимо чаще успешно решали эту задачу по сравнению с остальными группами испытуемых (критерий Манна–Уитни; подгруппа 2 > подгруппа 1 $p = 0.02$; 2 > 3 $p = 0.008$; 1 и 3 — значимых различий нет), никаких значимых различий между подгруппами в частоте учета требования не оказалось. Этот факт также противоречит гипотезе 2.

Резюмируя все полученные результаты, нужно отметить, что обе сформулированные гипотезы не

Таблица 4

Средние и стандартные отклонения показателей частоты учета требования задачи № 1 для трех подгрупп испытуемых

	Среднее	**Стандартное отклонение**
Подгруппа 1	42%	44%
Подгруппа 2	40%	47%
Подгруппа 3	32%	43%

подтвердились. В ходе решения экспериментальных задач испытуемые независимо от уровня своей алгебраической компетентности составляли корректные уравнения, не слишком обращая внимание на варьируемые требования (особенно это заметно в случае задачи № 2, где наиболее частотное уравнение не соответствовало по своему содержанию ни одному из требований). Таким образом, налицо существенная ригидность процесса решения текстовой алгебраической задачи, что позволяет говорить о существовании инвариантов в структуре репрезентации такой задачи решателем и/или в способах ее решения.

Учитывая характер материала, из которого «складывается» процесс решения текстовой задачи по алгебре, — построение вторичной знаковой или моделирующей системы (Спиридонов, 2006, 2008), — можно утверждать, что мы обнаружили явление, в значительной степени совпадающее с феноменом узуса (от *лат.* usus — пользование, употребление, обычай), описанным в языкознании, т.е. с общепринятым у носителей данного языка употреблением языковой единицы (например, слова). Как и узус, составление определенных уравнений в ходе решения текстовой задачи по алгебре отличается устойчивостью к ситуативным воздействиям, характеризует поведение группы, а не конкретного решателя и в значительной мере не зависит от «языковой» компетентности (умения пользоваться данной знаковой системой). На основании полученных результатов можно сделать вывод, что «узус» уравнений также представляет собой реальное явление.

Гипотетическими объяснениями такого положения дел могут служить несколько разноплановых соображений, не противоречащих друг другу. Во-первых, возможно, существуют общие для всех типов и уровней общеобразовательных школ способы обучения решению алгебраических задач, которые и демонстрируют испытуемые. (Учитывая разноплановый состав выборки, этот вариант не кажется слишком вероятным.) Во-вторых, могут существовать более «удобные» для решения, более «доступные» или более «простые» для составления уравнения. (Понятно, что такого рода формулировки не могут быть окончательными, но в качестве фиксирующих феноменологию процесса решения для дальнейших исследований они вполне приемлемы.) В-третьих, может статься, что за полученными фактами лежат ограничения в использовании алгебраической записи испытуемыми: не подозревая о широких возможностях этой знаковой системы, они используют лишь единичные способы обозначения элементов задачи и не стремятся к разнообразию. В пользу этой версии свидетельствуют и ошибки «предметной» интерпретации правильного количественного ответа, которые в больших количествах содержатся в протоколах: испытуемые путали время и скорость движения, расстояние и его часть, сестер брата и сестер сестры и т.д. (Этому объяснению до некоторой степени противоречит отсутствие различий в частоте учета требования между решателями различной компетентности: нарастание успешности решений не приводит к параллельному увеличению многообразия эффективных средств мышления.) По-видимому, возможны и другие объяснения.

Полученные факты и связанные с ними обобщения — лишь первый шаг в исследовании узуса решений мыслительных задач. Однако представляется, что предложенный метод анализа позволяет вплотную подойти к изучению психологической структуры задачи.

Литература

Балл Г.А. Теория учебных задач: Психолого-педагогический аспект. М., 1990.

Петухов В.В. Психология мышления. М., 1987.

Рубинштейн С.Л. О мышлении и путях его исследования. М., 1958.

Спиридонов В.Ф. Закономерности онтогенетического развития продуктивного мышления // Вестник МГУ. Сер. 14. Психология. 1994. № 2. С. 13–25.

Спиридонов В.Ф. Психологические механизмы творческого мышления // Нелинейная динамика в когнитивных исследованиях: Тезисы докладов Всероссийской конференции. Нижний Новгород, 2009. С. 142–143.

Спиридонов В.Ф. Психология решения задач и проблем и пути развития профессионального мышления // Теоретические и прикладные проблемы психологии мышления: Труды конференции молодых ученых памяти К. Дункера. М., 2008. С. 37–69.

Спиридонов В.Ф. Функциональная организация процесса решения мыслительной задачи: Дис. ... докт. психол. наук. М., 2006.

Фридман Л.М. Основы проблемологии. М., 2001.

Knoblich G., Ohlsson S., Raney G. An eye movement study of insight problem solving // Memory & Cognition. 2001. 29. 7. 1000–1009.

Kotovsky K., Hayes J.R., Simon H.A. Why are some problems hard? Evidence from the tower of Hanoi // Cognitive Psychology. 1985. 17. 248–294.

Spiridonov V.F. The role of heuristic devices in the development of processes in resolving a creative task // Journal of Russian and East European Psychology. 1997. March–April. 35. 2. 66–78.

Спиридонов Владимир Феликсович, профессор Института психологии РГГУ, доктор психологических наук

Контакты: vfspiridonov@yandex.ru